Operadores en Espacios de Hilbert

UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

En todo lo que sigue la letra $\mathcal{H}$ representará un espacio de Hilbert real o complejo.

En todo lo que sigue la letra $\mathcal{H}$ representará un espacio de Hilbert real o complejo.Si $S, T \in L(\mathcal{H})$, notaremos ST su composición $S \circ T$.

En todo lo que sigue la letra $\mathcal{H}$ representará un espacio de Hilbert real o complejo.Si $S, T \in L(\mathcal{H})$, notaremos ST su composición $S \circ T$. Representaremos por $I_{\mathcal{H}}$ o, simplemente, por I, el operador identidad en $\mathcal{H}$.

En todo lo que sigue la letra $\mathcal{H}$ representará un espacio de Hilbert real o complejo.Si $S, T \in L(\mathcal{H})$, notaremos ST su composición $S \circ T$. Representaremos por $I_{\mathcal{H}}$ o, simplemente, por I, el operador identidad en $\mathcal{H}$.Se dice que un operador $T \in L(\mathcal{H})$ es **inversible**, o que tiene inverso, si T es un isomorfismo topológico, es decir, existe $T^{-1} \in L(\mathcal{H})$.

En todo lo que sigue la letra $\mathcal{H}$ representará un espacio de Hilbert real o complejo.Si $S, T \in L(\mathcal{H})$, notaremos ST su composición $S \circ T$. Representaremos por $I_{\mathcal{H}}$ o, simplemente, por I, el operador identidad en $\mathcal{H}$.Se dice que un operador $T \in L(\mathcal{H})$ es **inversible**, o que tiene inverso, si T es un isomorfismo topológico, es decir, existe $T^{-1} \in L(\mathcal{H})$.

Proposición. Para cada $T \in L(\mathcal{H})$ hay un único operador $T^* \in L(\mathcal{H})$, llamado el **adjunto** de T, verificando que

$$(Tx \mid y) = (x \mid T^* y) \quad \forall x, y \in \mathcal{H} \tag{1}$$

En todo lo que sigue la letra $\mathcal{H}$ representará un espacio de Hilbert real o complejo.Si $S,T \in L(\mathcal{H})$, notaremos ST su composición $S \circ T$. Representaremos por $I_{\mathcal{H}}$ o, simplemente, por I, el operador identidad en $\mathcal{H}$.Se dice que un operador $T \in L(\mathcal{H})$ es **inversible**, o que tiene inverso, si T es un isomorfismo topológico, es decir, existe $T^{-1} \in L(\mathcal{H})$.

Proposición. Para cada $T \in L(\mathcal{H})$ hay un único operador $T^* \in L(\mathcal{H})$, llamado el **adjunto** de T, verificando que

$$(Tx \mid y) = (x \mid T^* y) \quad \forall x,y \in \mathcal{H} \tag{1}$$

Parar todos $S,T \in L(\mathcal{H})$, y todo $\lambda \in \mathbb{K}$, se verifica:

- i) $(S+\lambda T)^* = S^* + \overline{\lambda} T^*$; ii) $(ST)^* = T^* S^*$; iii) $(T^*)^* = T$;

En todo lo que sigue la letra $\mathcal{H}$ representará un espacio de Hilbert real o complejo.Si $S,T \in L(\mathcal{H})$, notaremos ST su composición $S \circ T$. Representaremos por $I_{\mathcal{H}}$ o, simplemente, por I, el operador identidad en $\mathcal{H}$.Se dice que un operador $T \in L(\mathcal{H})$ es **inversible**, o que tiene inverso, si T es un isomorfismo topológico, es decir, existe $T^{-1} \in L(\mathcal{H})$.

Proposición. Para cada $T \in L(\mathcal{H})$ hay un único operador $T^* \in L(\mathcal{H})$, llamado el **adjunto** de T, verificando que

$$(Tx \mid y) = (x \mid T^*y) \quad \forall x,y \in \mathcal{H} \tag{1}$$

Parar todos $S,T \in L(\mathcal{H})$, y todo $\lambda \in \mathbb{K}$, se verifica:

- i) $(S+\lambda T)^* = S^* + \overline{\lambda} T^*$; ii) $(ST)^* = T^*S^*$; iii) $(T^*)^* = T$;
- iv) $\|T^*\| = \|T\|$; v) $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Además, T es inversible si, y sólo si, T^* es inversible, en cuyo caso $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Observa que $L(\mathcal{H})$ tiene una rica estructura: es un espacio vectorial y también es un anillo cuyo producto es la composición de operadores $(S, T) \mapsto ST$, la cual es distributiva respecto de la adición. Todo esto se resume diciendo que $L(\mathcal{H})$ es un **álgebra**.

Observa que $L(\mathcal{H})$ tiene una rica estructura: es un espacio vectorial y también es un anillo cuyo producto es la composición de operadores $(S,T) \mapsto ST$, la cual es distributiva respecto de la adición. Todo esto se resume diciendo que $L(\mathcal{H})$ es un **álgebra**.

Además, $L(\mathcal{H})$ es un espacio de Banach y el producto es continuo pues $\|ST\| \leqslant \|S\|\|T\|$. Todo esto se resume diciendo que $L(\mathcal{H})$ es un **álgebra de Banach**.

Observa que $L(\mathcal{H})$ tiene una rica estructura: es un espacio vectorial y también es un anillo cuyo producto es la composición de operadores $(S, T) \mapsto ST$, la cual es distributiva respecto de la adición. Todo esto se resume diciendo que $L(\mathcal{H})$ es un **álgebra**.

Además, $L(\mathcal{H})$ es un espacio de Banach y el producto es continuo pues $\|ST\| \leqslant \|S\|\|T\|$. Todo esto se resume diciendo que $L(\mathcal{H})$ es un **álgebra de Banach**.

Además, la aplicación $T \mapsto T^*$ es una **involución** (porque $(T^*)^* = T$) **de álgebra** (porque $(ST)^* = T^*S^*$); y tiene unidad para el producto que es la aplicación identidad. Todo esto se resume diciendo que $L(\mathcal{H})$ es un **álgebra de Banach involutiva con unidad**.

Observa que $L(\mathcal{H})$ tiene una rica estructura: es un espacio vectorial y también es un anillo cuyo producto es la composición de operadores $(S, T) \mapsto ST$, la cual es distributiva respecto de la adición. Todo esto se resume diciendo que $L(\mathcal{H})$ es un **álgebra**.

Además, $L(\mathcal{H})$ es un espacio de Banach y el producto es continuo pues $\|ST\| \leqslant \|S\|\|T\|$. Todo esto se resume diciendo que $L(\mathcal{H})$ es un **álgebra de Banach**.

Además, la aplicación $T \mapsto T^*$ es una **involución** (porque $(T^*)^* = T$) **de álgebra** (porque $(ST)^* = T^*S^*$); y tiene unidad para el producto que es la aplicación identidad. Todo esto se resume diciendo que $L(\mathcal{H})$ es un **álgebra de Banach involutiva con unidad**.

En consecuencia, los conceptos propios de la teoría de anillos como, por ejemplo, el concepto de ideal, tienen perfecto sentido en $L(\mathcal{H})$.

Observa que $L(\mathcal{H})$ tiene una rica estructura: es un espacio vectorial y también es un anillo cuyo producto es la composición de operadores $(S, T) \mapsto ST$, la cual es distributiva respecto de la adición. Todo esto se resume diciendo que $L(\mathcal{H})$ es un **álgebra**.

Además, $L(\mathcal{H})$ es un espacio de Banach y el producto es continuo pues $\|ST\| \leqslant \|S\|\|T\|$. Todo esto se resume diciendo que $L(\mathcal{H})$ es un **álgebra de Banach**.

Además, la aplicación $T \mapsto T^*$ es una **involución** (porque $(T^*)^* = T$) **de álgebra** (porque $(ST)^* = T^*S^*$); y tiene unidad para el producto que es la aplicación identidad. Todo esto se resume diciendo que $L(\mathcal{H})$ es un **álgebra de Banach involutiva con unidad**.

En consecuencia, los conceptos propios de la teoría de anillos como, por ejemplo, el concepto de ideal, tienen perfecto sentido en $L(\mathcal{H})$.

Se dice que un subconjunto $A \subset L(\mathcal{H})$ es *autoadjunto* si siempre que $T \in A$ se tiene que $T^* \in A$.

Proposición. Para $T \in L(\mathcal{H})$ se verifica que

$$\overline{T(\mathcal{H})}^{\perp} = \ker(T^*), \quad \ker(T)^{\perp} = \overline{T^*(\mathcal{H})} \tag{2}$$

Proposición. Para $T \in L(\mathcal{H})$ se verifica que

$$\overline{T(\mathcal{H})}^{\perp} = \ker(T^*), \quad \ker(T)^{\perp} = \overline{T^*(\mathcal{H})} \tag{2}$$

Por tanto

$$\mathcal{H} = \ker(T^*) \oplus \overline{T(H)} = \ker(T) \oplus \overline{T^*(H)} \qquad \text{(suma ortogonal)} \tag{3}$$

Proposición. Para $T \in L(\mathcal{H})$ se verifica que

$$\overline{T(\mathcal{H})}^{\perp} = \ker(T^*), \quad \ker(T)^{\perp} = \overline{T^*(\mathcal{H})} \tag{2}$$

Por tanto

$$\mathcal{H} = \ker(T^*) \oplus \overline{T(H)} = \ker(T) \oplus \overline{T^*(H)} \qquad \text{(suma ortogonal)} \tag{3}$$

En particular, T tiene imagen densa si, y sólo si, T^* es inyectivo.

Proposición. Para $T \in L(\mathcal{H})$ se verifica que

$$\overline{T(\mathcal{H})}^{\perp} = \ker(T^*), \quad \ker(T)^{\perp} = \overline{T^*(\mathcal{H})} \tag{2}$$

Por tanto

$$\mathcal{H} = \ker(T^*) \oplus \overline{T(H)} = \ker(T) \oplus \overline{T^*(H)} \qquad \text{(suma ortogonal)} \tag{3}$$

En particular, T tiene imagen densa si, y sólo si, T^* es inyectivo.

Se dice que un subespacio *cerrado* M de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un **subespacio invariante** por $T \in L(\mathcal{H})$, si $T(M) \subset M$, y se dice que M es un **subespacio reductor** para T si $T(M) \subset M$ y $T(M^{\perp}) \subset M^{\perp}$. Observa que M es un subespacio reductor para T si, y sólo si, $M^{\perp}$ es un subespacio reductor para T.

Se dice que un subespacio *cerrado* M de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un **subespacio invariante** por $T \in L(\mathcal{H})$, si $T(M) \subset M$, y se dice que M es un **subespacio reductor** para T si $T(M) \subset M$ y $T(M^{\perp}) \subset M^{\perp}$. Observa que M es un subespacio reductor para T si, y sólo si, $M^{\perp}$ es un subespacio reductor para T.

Proposición. Sean M y N subespacios cerrados de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces se verifica que

$$T(M) \subset N \iff T^*(N^{\perp}) \subset M^{\perp} \tag{4}$$

Se dice que un subespacio *cerrado* M de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un **subespacio invariante** por $T \in L(\mathcal{H})$, si $T(M) \subset M$, y se dice que M es un **subespacio reductor** para T si $T(M) \subset M$ y $T(M^{\perp}) \subset M^{\perp}$. Observa que M es un subespacio reductor para T si, y sólo si, $M^{\perp}$ es un subespacio reductor para T.

Proposición. Sean M y N subespacios cerrados de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces se verifica que

$$T(M) \subset N \iff T^*(N^{\perp}) \subset M^{\perp} \tag{4}$$

En particular, M es un subespacio reductor para T si, y sólo si, M es invariante por T y por T^*.

Se dice que un subespacio *cerrado* M de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un **subespacio invariante** por $T \in L(\mathcal{H})$, si $T(M) \subset M$, y se dice que M es un **subespacio reductor** para T si $T(M) \subset M$ y $T(M^{\perp}) \subset M^{\perp}$. Observa que M es un subespacio reductor para T si, y sólo si, $M^{\perp}$ es un subespacio reductor para T.

Proposición. Sean M y N subespacios cerrados de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces se verifica que

$$T(M) \subset N \iff T^*(N^{\perp}) \subset M^{\perp} \tag{4}$$

En particular, M es un subespacio reductor para T si, y sólo si, M es invariante por T y por T^*.

Se dice que un operador $T \in L(\mathcal{H})$ es **autoadjunto** o **hermitiano** cuando $T^* = T$, es decir, cuando se verifica que

$$(Tx \mid y) = (x \mid Ty) \quad (x, y \in \mathcal{H}).$$

Se dice que un subespacio *cerrado* M de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un **subespacio invariante** por $T \in L(\mathcal{H})$, si $T(M) \subset M$, y se dice que M es un **subespacio reductor** para T si $T(M) \subset M$ y $T(M^{\perp}) \subset M^{\perp}$. Observa que M es un subespacio reductor para T si, y sólo si, $M^{\perp}$ es un subespacio reductor para T.

Proposición. Sean M y N subespacios cerrados de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces se verifica que

$$T(M) \subset N \iff T^*(N^{\perp}) \subset M^{\perp} \tag{4}$$

En particular, M es un subespacio reductor para T si, y sólo si, M es invariante por T y por T^*.

Se dice que un operador $T \in L(\mathcal{H})$ es **autoadjunto** o **hermitiano** cuando $T^* = T$, es decir, cuando se verifica que

$$(Tx \mid y) = (x \mid Ty) \quad (x, y \in \mathcal{H}).$$

Los operadores autoadjuntos constituyen un subespacio vectorial *real* de $L(\mathcal{H})$ que, además, es cerrado.

Si $T \in L(\mathcal{H})$ es autoadjunto las igualdades (2) y (3) se escriben

$$\overline{T(\mathcal{H})}^{\perp} = \ker(T), \quad \mathcal{H} = \overline{T(\mathcal{H})} \oplus \ker(T) \qquad (T \in L(\mathcal{H}), T^* = T) \tag{5}$$

Si $T \in L(\mathcal{H})$ es autoadjunto las igualdades (2) y (3) se escriben

$$\overline{T(\mathcal{H})}^{\perp} = \ker(T), \quad \mathcal{H} = \overline{T(\mathcal{H})} \oplus \ker(T) \qquad (T \in L(\mathcal{H}), T^* = T) \tag{5}$$

Para todo $T \in L(\mathcal{H})$ los operadores $T + T^*$, $T T^*$, $T^* T$ son autoadjuntos.

Si $T \in L(\mathcal{H})$ es autoadjunto las igualdades (2) y (3) se escriben

$$\overline{T(\mathcal{H})}^{\perp} = \ker(T), \quad \mathcal{H} = \overline{T(\mathcal{H})} \oplus \ker(T) \qquad (T \in L(\mathcal{H}), T^* = T) \tag{5}$$

Para todo $T \in L(\mathcal{H})$ los operadores $T + T^*$, $T\,T^*$, T^*T son autoadjuntos.

Un operador $T \in L(\mathcal{H})$ se llama **normal** cuando $T\,T^* = T^*T$. Los operadores normales *no* constituyen un subespacio vectorial de $L(\mathcal{H})$ si la dimensión de $\mathcal{H}$ es mayor o igual que 2.

Si $T \in L(\mathcal{H})$ es autoadjunto las igualdades (2) y (3) se escriben

$$\overline{T(\mathcal{H})}^{\perp} = \ker(T), \quad \mathcal{H} = \overline{T(\mathcal{H})} \oplus \ker(T) \qquad (T \in L(\mathcal{H}), T^* = T) \tag{5}$$

Para todo $T \in L(\mathcal{H})$ los operadores $T + T^*$, $T\,T^*$, T^*T son autoadjuntos.

Un operador $T \in L(\mathcal{H})$ se llama **normal** cuando $T\,T^* = T^*T$. Los operadores normales *no* constituyen un subespacio vectorial de $L(\mathcal{H})$ si la dimensión de $\mathcal{H}$ es mayor o igual que 2.

Un operador $T \in L(\mathcal{H})$ se llama **unitario** cuando $T\,T^* = T^*T = I$.

Todo operador $T \in L(\mathcal{H})$ define una forma sesquilineal $\varphi_T : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ por

$$\varphi_T(x,y) = (Tx \mid y) \quad (x,y \in \mathcal{H})$$

Todo operador $T \in L(\mathcal{H})$ define una forma sesquilineal $\varphi_T : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ por

$$\varphi_T(x,y) = (Tx \mid y) \quad (x,y \in \mathcal{H})$$

cuya forma cuadrática asociada es

$$Q_T(x) = (Tx \mid x) \quad (x \in \mathcal{H})$$

Todo operador $T \in L(\mathcal{H})$ define una forma sesquilineal $\varphi_T : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ por

$$\varphi_T(x,y) = (Tx \mid y) \quad (x,y \in \mathcal{H})$$

cuya forma cuadrática asociada es

$$Q_T(x) = (Tx \mid x) \quad (x \in \mathcal{H})$$

Tenemos que

$$\varphi_T(x,y) = \overline{\varphi_T(y,x)} \iff (Tx \mid y) = (x \mid Ty)$$

Todo operador $T \in L(\mathcal{H})$ define una forma sesquilineal $\varphi_T : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ por

$$\varphi_T(x,y) = (Tx \mid y) \quad (x,y \in \mathcal{H})$$

cuya forma cuadrática asociada es

$$Q_T(x) = (Tx \mid x) \quad (x \in \mathcal{H})$$

Tenemos que

$$\varphi_T(x,y) = \overline{\varphi_T(y,x)} \quad \Longleftrightarrow \quad (Tx \mid y) = (x \mid Ty)$$

es decir, φ_T es hermítica si, y sólo si, T es autoadjunto. En particular, si T es autoadjunto la forma cuadrática Q_T debe tomar valores reales.

Todo operador $T \in L(\mathcal{H})$ define una forma sesquilineal $\varphi_T : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ por

$$\varphi_T(x,y) = (Tx \mid y) \quad (x,y \in \mathcal{H})$$

cuya forma cuadrática asociada es

$$Q_T(x) = (Tx \mid x) \quad (x \in \mathcal{H})$$

Tenemos que

$$\varphi_T(x,y) = \overline{\varphi_T(y,x)} \quad \Longleftrightarrow \quad (Tx \mid y) = (x \mid Ty)$$

es decir, φ_T es hermítica si, y sólo si, T es autoadjunto. En particular, si T es autoadjunto la forma cuadrática Q_T debe tomar valores reales.

En el caso complejo, esta condición es también suficiente pues, por la identidad de polarización, se tiene que

$$4\varphi_T(x,y) = Q_T(x+y) - Q_T(x-y) + iQ_T(x+iy) - iQ_T(x-iy)$$

y si Q_T toma valores reales se deduce enseguida que φ_T es hermítica.

Todo operador $T \in L(\mathcal{H})$ define una forma sesquilineal $\varphi_T : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ por

$$\varphi_T(x,y) = (Tx \mid y) \quad (x,y \in \mathcal{H})$$

cuya forma cuadrática asociada es

$$Q_T(x) = (Tx \mid x) \quad (x \in \mathcal{H})$$

Tenemos que

$$\varphi_T(x,y) = \overline{\varphi_T(y,x)} \quad \Longleftrightarrow \quad (Tx \mid y) = (x \mid Ty)$$

es decir, φ_T es hermítica si, y sólo si, T es autoadjunto. En particular, si T es autoadjunto la forma cuadrática Q_T debe tomar valores reales.

En el caso complejo, esta condición es también suficiente pues, por la identidad de polarización, se tiene que

$$4\varphi_T(x,y) = Q_T(x+y) - Q_T(x-y) + iQ_T(x+iy) - iQ_T(x-iy)$$

y si Q_T toma valores reales se deduce enseguida que φ_T es hermítica.

Y, también en el caso complejo, deducimos que φ_T es nula, lo que equivale a que $T = 0$, si, y sólo si, Q_T es nula.

Proposición. Sea $T \in L(\mathcal{H})$ donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert **complejo**.

Proposición. Sea $T \in L(\mathcal{H})$ donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert **complejo**.

i) Si $(Tx \mid x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $T = 0$.

Proposición. Sea $T \in L(\mathcal{H})$ donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert **complejo**.

i) Si $(Tx \mid x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $T = 0$.

ii) T es autoadjunto si, y sólo si, $(Tx \mid x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Proposición. Sea $T \in L(\mathcal{H})$ donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert **complejo**.

i) Si $(Tx \mid x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $T = 0$.

ii) T es autoadjunto si, y sólo si, $(Tx \mid x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

iii) T se expresa de forma única como $T = A + iB$ donde $A, B \in L(\mathcal{H})$ son operadores autoadjuntos; T es normal si, y sólo si, $AB = BA$.

Proposición. Sea $T \in L(\mathcal{H})$ donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert **complejo**.

i) Si $(Tx \mid x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $T = 0$.

ii) T es autoadjunto si, y sólo si, $(Tx \mid x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

iii) T se expresa de forma única como $T = A + iB$ donde $A, B \in L(\mathcal{H})$ son operadores autoadjuntos; T es normal si, y sólo si, $AB = BA$.

Proposición. Sea $T \in L(\mathcal{H})$ donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert **complejo**.

i) Si $(Tx \mid x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $T = 0$.

ii) T es autoadjunto si, y sólo si, $(Tx \mid x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

iii) T se expresa de forma única como $T = A + iB$ donde $A, B \in L(\mathcal{H})$ son operadores autoadjuntos; T es normal si, y sólo si, $AB = BA$.

Proposición. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$.

Proposición. Sea $T \in L(\mathcal{H})$ donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert **complejo**.

i) Si $(Tx \mid x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $T = 0$.
ii) T es autoadjunto si, y sólo si, $(Tx \mid x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathcal{H}$.
iii) T se expresa de forma única como $T = A + iB$ donde $A, B \in L(\mathcal{H})$ son operadores autoadjuntos; T es normal si, y sólo si, $AB = BA$.

Proposición. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$.

a) Si T es autoadjunto, entonces

$$\|T\| = \sup\{|(Tx \mid x)| : \ x \in \mathcal{H}, \ \|x\| = 1\} \tag{6}$$

Por tanto, si $T = T^*$ y $(Tx \mid x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $T = 0$.

Proposición. Sea $T \in L(\mathcal{H})$ donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert **complejo**.

i) Si $(Tx \mid x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $T = 0$.

ii) T es autoadjunto si, y sólo si, $(Tx \mid x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

iii) T se expresa de forma única como $T = A + iB$ donde $A, B \in L(\mathcal{H})$ son operadores autoadjuntos; T es normal si, y sólo si, $AB = BA$.

Proposición. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$.

a) Si T es autoadjunto, entonces

$$\|T\| = \sup\{|(Tx \mid x)| : \; x \in \mathcal{H}, \; \|x\| = 1\} \tag{6}$$

Por tanto, si $T = T^*$ y $(Tx \mid x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $T = 0$.

b) T es normal si, y sólo si, $\|Tx\| = \|T^*x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Matrices. Supongamos que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y sea $B = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormal. A cada operador $T \in L(\mathcal{H})$ podemos asociar una función $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, dada por

$$a(i,j) = \left(Tu_j \mid u_i\right) \quad ((i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N})$$

Matrices. Supongamos que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y sea $B = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormal. A cada operador $T \in L(\mathcal{H})$ podemos asociar una función $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, dada por

$$a(i,j) = \left(Tu_j \mid u_i\right) \quad ((i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N})$$

Podemos pensar en dicha función como una "matriz", $A = \big(a(i,j)\big)_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, que representa al operador T en la base B, pues como cada elemento de $\mathcal{H}$ viene dado por su serie de Fourier en B, es claro que el operador T está determinado de manera única por sus valores en B y se tiene que

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(Tu_j \mid u_i\right) u_i = \sum_{i=1}^{\infty} a(i,j) u_i \quad (j \in \mathbb{N})$$

por lo que T está determinado de forma única por su matriz A.

Matrices. Supongamos que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y sea $B = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormal. A cada operador $T \in L(\mathcal{H})$ podemos asociar una función $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, dada por

$$a(i,j) = (Tu_j \mid u_i) \quad ((i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N})$$

Podemos pensar en dicha función como una “matriz”, $A = (a(i,j))_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, que representa al operador T en la base B, pues como cada elemento de $\mathcal{H}$ viene dado por su serie de Fourier en B, es claro que el operador T está determinado de manera única por sus valores en B y se tiene que

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^{\infty} (Tu_j \mid u_i)\, u_i = \sum_{i=1}^{\infty} a(i,j) u_i \quad (j \in \mathbb{N})$$

por lo que T está determinado de forma única por su matriz A.

Como $T^* \in L(\mathcal{H})$ y

$$(T^* u_j \mid u_i) = (u_j \mid Tu_i) = \overline{(Tu_i \mid u_j)} = \overline{a(j,i)}$$

Matrices. Supongamos que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y sea $B=\{u_n : n\in\mathbb{N}\}$ una base ortonormal. A cada operador $T\in L(\mathcal{H})$ podemos asociar una función $a:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{K}$, dada por

$$a(i,j)=\left(Tu_j \mid u_i\right) \quad ((i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N})$$

Podemos pensar en dicha función como una “matriz”, $A=\left(a(i,j)\right)_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, que representa al operador T en la base B, pues como cada elemento de $\mathcal{H}$ viene dado por su serie de Fourier en B, es claro que el operador T está determinado de manera única por sus valores en B y se tiene que

$$T(u_j)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(Tu_j \mid u_i\right)u_i=\sum_{i=1}^{\infty}a(i,j)u_i \quad (j\in\mathbb{N})$$

por lo que T está determinado de forma única por su matriz A.

Como $T^*\in L(\mathcal{H})$ y

$$\left(T^*u_j \mid u_i\right)=\left(u_j \mid Tu_i\right)=\overline{\left(Tu_i \mid u_j\right)}=\overline{a(j,i)}$$

deducimos que la matriz A^* que representa a T^* en B viene dada por

$$a^*(i,j)=\overline{a(j,i)} \quad ((i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N})$$

Matrices. Supongamos que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y sea $B = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormal. A cada operador $T \in L(\mathcal{H})$ podemos asociar una función $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, dada por

$$a(i,j) = (Tu_j \mid u_i) \quad ((i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N})$$

Podemos pensar en dicha función como una "matriz", $A = \big(a(i,j)\big)_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, que representa al operador T en la base B, pues como cada elemento de $\mathcal{H}$ viene dado por su serie de Fourier en B, es claro que el operador T está determinado de manera única por sus valores en B y se tiene que

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^{\infty} (Tu_j \mid u_i)\, u_i = \sum_{i=1}^{\infty} a(i,j) u_i \quad (j \in \mathbb{N})$$

por lo que T está determinado de forma única por su matriz A.

Como $T^* \in L(\mathcal{H})$ y

$$(T^* u_j \mid u_i) = (u_j \mid Tu_i) = \overline{(Tu_i \mid u_j)} = \overline{a(j,i)}$$

deducimos que la matriz A^* que representa a T^* en B viene dada por

$$a^*(i,j) = \overline{a(j,i)} \quad ((i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N})$$

es decir $A^* = \overline{A}^t$ es la matriz transpuesta conjugada de A.

Operadores de multiplicación. Consideremos el caso de una matriz diagonal infinita dada por $a(i,i) = \lambda_i$, $a(i,j) = 0$ para $i \neq j$. Pongamos $\lambda = \{\lambda_n\}$ y tratemos de definir un *operador diagonal* M_λ que verifique $M_\lambda(u_i) = \lambda_i u_i$.

Operadores de multiplicación. Consideremos el caso de una matriz diagonal infinita dada por $a(i,i) = \lambda_i$, $a(i,j) = 0$ para $i \neq j$. Pongamos $\lambda = \{\lambda_n\}$ y tratemos de definir un *operador diagonal* M_λ que verifique $M_\lambda(u_i) = \lambda_i u_i$.Una condición necesaria para que dicho operador sea continuo es que la sucesión $\{\lambda_n\}$ esté acotada, en cuyo caso definiendo

$$M_\lambda(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x \mid u_i) u_i \quad (x \in \mathcal{H})$$

Operadores de multiplicación. Consideremos el caso de una matriz diagonal infinita dada por $a(i,i)=\lambda_i$, $a(i,j)=0$ para $i\neq j$. Pongamos $\lambda=\{\lambda_n\}$ y tratemos de definir un *operador diagonal* M_λ que verifique $M_\lambda(u_i)=\lambda_i u_i$.Una condición necesaria para que dicho operador sea continuo es que la sucesión $\{\lambda_n\}$ esté acotada, en cuyo caso definiendo

$$M_\lambda(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\,(x\mid u_i)\,u_i \quad (x\in\mathcal{H})$$

se tiene que $\|M_\lambda(x)\|^2\leqslant\|\lambda\|_\infty^2\|x\|^2$ por lo que el operador así definido es continuo con $\|M_\lambda\|=\|\lambda\|_\infty$ y $M_\lambda(u_i)=\lambda_i u_i$.

Operadores de multiplicación. Consideremos el caso de una matriz diagonal infinita dada por $a(i,i)=\lambda_i$, $a(i,j)=0$ para $i\neq j$. Pongamos $\lambda=\{\lambda_n\}$ y tratemos de definir un *operador diagonal* M_λ que verifique $M_\lambda(u_i)=\lambda_i u_i$.Una condición necesaria para que dicho operador sea continuo es que la sucesión $\{\lambda_n\}$ esté acotada, en cuyo caso definiendo

$$M_\lambda(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\,(x\mid u_i)\,u_i \quad (x\in\mathcal{H})$$

se tiene que $\|M_\lambda(x)\|^2\leqslant\|\lambda\|_\infty^2\|x\|^2$ por lo que el operador así definido es continuo con $\|M_\lambda\|=\|\lambda\|_\infty$ y $M_\lambda(u_i)=\lambda_i u_i$.

En el caso particular del espacio ℓ_2 considerando la base ortogonal $B=\{\mathrm{e}_n : n\in\mathbb{N}\}$ de los vectores unidad, se tiene que

$$M_\lambda(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x(n)\,\mathrm{e}_n \qquad (x\in\ell_2)$$

Operadores de multiplicación. Consideremos el caso de una matriz diagonal infinita dada por $a(i,i)=\lambda_i$, $a(i,j)=0$ para $i\neq j$. Pongamos $\lambda=\{\lambda_n\}$ y tratemos de definir un *operador diagonal* M_λ que verifique $M_\lambda(u_i)=\lambda_i u_i$.Una condición necesaria para que dicho operador sea continuo es que la sucesión $\{\lambda_n\}$ esté acotada, en cuyo caso definiendo

$$M_\lambda(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\,(x\mid u_i)\,u_i \quad (x\in\mathcal{H})$$

se tiene que $\|M_\lambda(x)\|^2\leqslant\|\lambda\|_\infty^2\|x\|^2$ por lo que el operador así definido es continuo con $\|M_\lambda\|=\|\lambda\|_\infty$ y $M_\lambda(u_i)=\lambda_i u_i$.

En el caso particular del espacio ℓ_2 considerando la base ortogonal $B=\{\mathrm{e}_n : n\in\mathbb{N}\}$ de los vectores unidad, se tiene que

$$M_\lambda(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x(n)\,\mathrm{e}_n \qquad (x\in\ell_2)$$

Dicho operador se llama *operador de multiplicación* por $\lambda=\{\lambda_n\}$ (respecto a la base B).

Operadores de multiplicación. Consideremos el caso de una matriz diagonal infinita dada por $a(i,i)=\lambda_i$, $a(i,j)=0$ para $i\neq j$. Pongamos $\lambda=\{\lambda_n\}$ y tratemos de definir un *operador diagonal* M_λ que verifique $M_\lambda(u_i)=\lambda_i u_i$.Una condición necesaria para que dicho operador sea continuo es que la sucesión $\{\lambda_n\}$ esté acotada, en cuyo caso definiendo

$$M_\lambda(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\,(x\mid u_i)\,u_i \quad (x\in\mathcal{H})$$

se tiene que $\|M_\lambda(x)\|^2\leqslant\|\lambda\|_\infty^2\|x\|^2$ por lo que el operador así definido es continuo con $\|M_\lambda\|=\|\lambda\|_\infty$ y $M_\lambda(u_i)=\lambda_i u_i$.

En el caso particular del espacio ℓ_2 considerando la base ortogonal $B=\{\mathrm{e}_n : n\in\mathbb{N}\}$ de los vectores unidad, se tiene que

$$M_\lambda(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x(n)\,\mathrm{e}_n \qquad (x\in\ell_2)$$

Dicho operador se llama *operador de multiplicación* por $\lambda=\{\lambda_n\}$ (respecto a la base B).Por lo antes visto, se tiene que $(M_\lambda)^*=M_{\overline{\lambda}}$ es el operador de multiplicación por $\overline{\lambda}=\{\overline{\lambda}_n\}$ (respecto a la base B).

Operadores de multiplicación. Consideremos el caso de una matriz diagonal infinita dada por $a(i,i)=\lambda_i$, $a(i,j)=0$ para $i\neq j$. Pongamos $\lambda=\{\lambda_n\}$ y tratemos de definir un *operador diagonal* M_λ que verifique $M_\lambda(u_i)=\lambda_i u_i$.Una condición necesaria para que dicho operador sea continuo es que la sucesión $\{\lambda_n\}$ esté acotada, en cuyo caso definiendo

$$M_\lambda(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\,(x\mid u_i)\,u_i \quad (x\in\mathcal{H})$$

se tiene que $\|M_\lambda(x)\|^2\leqslant\|\lambda\|_\infty^2\|x\|^2$ por lo que el operador así definido es continuo con $\|M_\lambda\|=\|\lambda\|_\infty$ y $M_\lambda(u_i)=\lambda_i u_i$.

En el caso particular del espacio ℓ_2 considerando la base ortogonal $B=\{\mathrm{e}_n : n\in\mathbb{N}\}$ de los vectores unidad, se tiene que

$$M_\lambda(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x(n)\,\mathrm{e}_n \qquad (x\in\ell_2)$$

Dicho operador se llama *operador de multiplicación* por $\lambda=\{\lambda_n\}$ (respecto a la base B).Por lo antes visto, se tiene que $(M_\lambda)^*=M_{\overline{\lambda}}$ es el operador de multiplicación por $\overline{\lambda}=\{\overline{\lambda}_n\}$ (respecto a la base B).Es inmediato que M_λ es normal; y es autoadjunto si, y sólo si, $\lambda_n\in\mathbb{R}$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Operadores de multiplicación. Consideremos el caso de una matriz diagonal infinita dada por $a(i,i)=\lambda_i$, $a(i,j)=0$ para $i\neq j$. Pongamos $\lambda=\{\lambda_n\}$ y tratemos de definir un *operador diagonal* M_λ que verifique $M_\lambda(u_i)=\lambda_i u_i$.Una condición necesaria para que dicho operador sea continuo es que la sucesión $\{\lambda_n\}$ esté acotada, en cuyo caso definiendo

$$M_\lambda(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\,(x\mid u_i)\,u_i \quad (x\in\mathcal{H})$$

se tiene que $\|M_\lambda(x)\|^2\leqslant\|\lambda\|_\infty^2\|x\|^2$ por lo que el operador así definido es continuo con $\|M_\lambda\|=\|\lambda\|_\infty$ y $M_\lambda(u_i)=\lambda_i u_i$.

En el caso particular del espacio ℓ_2 considerando la base ortogonal $B=\{\mathrm{e}_n : n\in\mathbb{N}\}$ de los vectores unidad, se tiene que

$$M_\lambda(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x(n)\,\mathrm{e}_n \qquad (x\in\ell_2)$$

Dicho operador se llama *operador de multiplicación* por $\lambda=\{\lambda_n\}$ (respecto a la base B).Por lo antes visto, se tiene que $(M_\lambda)^*=M_{\overline{\lambda}}$ es el operador de multiplicación por $\overline{\lambda}=\{\overline{\lambda}_n\}$ (respecto a la base B).Es inmediato que M_λ es normal; y es autoadjunto si, y sólo si, $\lambda_n\in\mathbb{R}$ para todo $n\in\mathbb{N}$.Observa que la aplicación $\lambda\mapsto M_\lambda$ de ℓ_∞ en $L(\ell_2)$ es lineal e isométrica, por lo que $L(\ell_2)$ contiene una copia isométrica de ℓ_∞ y por tanto $L(\ell_2)$ no es separable. Observa también que si $\lambda,\mu\in\ell_\infty$ entonces $M_\lambda M_\mu=M_{\lambda\mu}$.

Consideremos ahora el espacio de Hilbert $L_2[a,b]$. Cada $\phi \in L_\infty[a,b]$ define un operador $M_\phi : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ por

$$M_\phi(f) = \phi f \qquad (f \in L_2[a,b])$$

Consideremos ahora el espacio de Hilbert $L_2[a,b]$. Cada $\phi \in L_\infty[a,b]$ define un operador $M_\phi : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ por

$$M_\phi(f) = \phi f \qquad (f \in L_2[a,b])$$

Dicho operador, que se llama *operador de multiplicación* por ϕ, es claramente lineal y continuo con $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$.

Consideremos ahora el espacio de Hilbert $L_2[a,b]$. Cada $\phi \in L_\infty[a,b]$ define un operador $M_\phi : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ por

$$M_\phi(f) = \phi f \qquad (f \in L_2[a,b])$$

Dicho operador, que se llama *operador de multiplicación* por ϕ, es claramente lineal y continuo con $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$.

Para todas $\phi, \psi \in L_\infty[a,b]$ se verifica que $M_{\phi\psi} = M_\phi M_\psi$. Además $(M_\phi)^* = M_{\overline{\phi}}$.

Consideremos ahora el espacio de Hilbert $L_2[a,b]$. Cada $\phi \in L_\infty[a,b]$ define un operador $M_\phi : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ por

$$M_\phi(f) = \phi f \qquad (f \in L_2[a,b])$$

Dicho operador, que se llama *operador de multiplicación* por ϕ, es claramente lineal y continuo con $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$.

Para todas $\phi, \psi \in L_\infty[a,b]$ se verifica que $M_{\phi\psi} = M_\phi M_\psi$. Además $(M_\phi)^* = M_{\overline{\phi}}$.

Por tanto, M_ϕ es un operador normal; es autoadjunto si, y solo si, $\phi(t) \in \mathbb{R}$ para casi todo $t \in [a,b]$, y es unitario si, y sólo si, $|\phi(t)| = 1$ para casi todo $t \in [a,b]$.

Operadores de desplazamiento. El operador $S : \ell_2 \to \ell_2$ definido por

$$Sx = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, e_{n+1} \qquad (x \in \ell_2) \tag{7}$$

se llama operador de *desplazamiento unilateral o hacia adelante*.
Se verifica que

$$S^{*}x = \sum_{n=2}^{\infty} x(n)\, e_{n-1} \tag{8}$$

dicho operador se llama operador de *desplazamiento hacia atrás*.

Operadores de desplazamiento. El operador $S:\ell_2\to\ell_2$ definido por

$$Sx=\sum_{n=1}^{\infty}x(n)\,e_{n+1}\qquad (x\in\ell_2) \tag{7}$$

se llama operador de *desplazamiento unilateral o hacia adelante*.

Se verifica que

$$S^*x=\sum_{n=2}^{\infty}x(n)\,e_{n-1} \tag{8}$$

dicho operador se llama operador de *desplazamiento hacia atrás*.

Observa que para todo $x\in\ell_2$:

$$S(x(1),x(2),x(3),\dots)=(0,x(1),x(2),x(3),\dots)$$
$$S^*(x(1),x(2),x(3),\dots)=(x(2),x(3),\dots)$$

Operadores de desplazamiento. El operador $S:\ell_2\to\ell_2$ definido por

$$Sx=\sum_{n=1}^{\infty}x(n)\,\mathrm{e}_{n+1}\qquad (x\in\ell_2) \tag{7}$$

se llama operador de *desplazamiento unilateral o hacia adelante*.
Se verifica que

$$S^*x=\sum_{n=2}^{\infty}x(n)\,\mathrm{e}_{n-1} \tag{8}$$

dicho operador se llama operador de *desplazamiento hacia atrás*.
Observa que para todo $x\in\ell_2$:

$$\begin{aligned} S(x(1),x(2),x(3),\dots)&=(0,x(1),x(2),x(3),\dots)\\ S^*(x(1),x(2),x(3),\dots)&=(x(2),x(3),\dots)\end{aligned}$$

El operador S es isométrico, $\|Sx\|=\|x\|$, por tanto $\ker S=\{0\}$ y S es inyectivo.

Operadores de desplazamiento. El operador $S:\ell_2\to\ell_2$ definido por

$$Sx=\sum_{n=1}^{\infty}x(n)\,e_{n+1}\qquad (x\in\ell_2) \tag{7}$$

se llama operador de *desplazamiento unilateral o hacia adelante*.

Se verifica que

$$S^*x=\sum_{n=2}^{\infty}x(n)\,e_{n-1} \tag{8}$$

dicho operador se llama operador de *desplazamiento hacia atrás*.

Observa que para todo $x\in\ell_2$:

$$\begin{aligned}S(x(1),x(2),x(3),\dots)&=(0,x(1),x(2),x(3),\dots)\\ S^*(x(1),x(2),x(3),\dots)&=(x(2),x(3),\dots)\end{aligned}$$

El operador S es isométrico, $\|Sx\|=\|x\|$, por tanto $\ker S=\{0\}$ y S es inyectivo.El operador S^* no es inyectivo y $\ker(S^*)=\mathbb{K}\,e_1$.

Operadores de desplazamiento. El operador $S:\ell_2\to\ell_2$ definido por

$$Sx=\sum_{n=1}^{\infty}x(n)\,e_{n+1}\qquad (x\in\ell_2) \tag{7}$$

se llama operador de *desplazamiento unilateral o hacia adelante*.

Se verifica que

$$S^*x=\sum_{n=2}^{\infty}x(n)\,e_{n-1} \tag{8}$$

dicho operador se llama operador de *desplazamiento hacia atrás*.

Observa que para todo $x\in\ell_2$:

$$\begin{aligned} S(x(1),x(2),x(3),\dots)&=(0,x(1),x(2),x(3),\dots)\\ S^*(x(1),x(2),x(3),\dots)&=(x(2),x(3),\dots)\end{aligned}$$

El operador S es isométrico, $\|Sx\|=\|x\|$, por tanto $\ker S=\{0\}$ y S es inyectivo.El operador S^* no es inyectivo y $\ker(S^*)=\mathbb{K}\,e_1$.
Se verifica que $S^*S=I$ pero SS^* es la proyección ortogonal sobre $(\mathbb{K}\,e_1)^{\perp}$.

Operadores integrales.

Operadores integrales. Dada una función $K \in L_2([a,b] \times [a,b])$, el operador integral de núcleo K, es el operador lineal $T_K : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ definido por

$$[T_K f](x) = \int_a^b K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y \qquad (f \in L_2[a,b]) \tag{9}$$

Operadores integrales. Dada una función $K \in L_2([a,b] \times [a,b])$, el operador integral de núcleo K, es el operador lineal $T_K : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ definido por

$$[T_K f](x) = \int_a^b K(x,y) f(y)\, \mathrm{d}y \qquad (f \in L_2[a,b]) \tag{9}$$

Dicho operador es continuo y $\|T_K\| \leqslant \|K\|_2$.

Operadores integrales. Dada una función $K \in L_2([a,b]\times[a,b])$, el operador integral de núcleo K, es el operador lineal $T_K : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ definido por

$$[T_K f](x) = \int_a^b K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y \qquad (f \in L_2[a,b]) \tag{9}$$

Dicho operador es continuo y $\|T_K\| \leqslant \|K\|_2$.
Se verifica que $(T_K)^* = T_{K^*}$ donde $K^*(x,y) = \overline{K(y,x)}$. Por tanto T_K es autoadjunto si, y sólo si, $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$ para casi todo $(x,y) \in [a,b]\times[a,b]$.

Operadores integrales. Dada una función $K \in L_2([a,b] \times [a,b])$, el operador integral de núcleo K, es el operador lineal $T_K : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ definido por

$$[T_K f](x) = \int_a^b K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y \qquad (f \in L_2[a,b]) \tag{9}$$

Dicho operador es continuo y $\|T_K\| \leqslant \|K\|_2$.
Se verifica que $(T_K)^* = T_{K^*}$ donde $K^*(x,y) = \overline{K(y,x)}$. Por tanto T_K es autoadjunto si, y sólo si, $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$ para casi todo $(x,y) \in [a,b] \times [a,b]$.
Un caso particular importante se presenta cuando $[a,b] = [0,1]$ y K es la función característica del conjunto $A = \{(x,y) : 0 \leqslant y < x \leqslant 1\}$. El correspondiente operador integral es el **operador de Volterra**, V, dado por

$$[Vf](x) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y \qquad (x \in [0,1], f \in L_2[0,1]).$$

Una **proyección ortogonal** en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un idempotente P tal que $\ker(P) = P(\mathcal{H})^{\perp}$.

Una **proyección ortogonal** en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un idempotente P tal que $\ker(P) = P(\mathcal{H})^{\perp}$.

Proposición. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ una aplicación lineal no nula. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

Una **proyección ortogonal** en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un idempotente P tal que $\ker(P) = P(\mathcal{H})^{\perp}$.

Proposición. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ una aplicación lineal no nula. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
i) P es un idempotente autoadjunto, es decir: $P^2 = P$ y $(Px \mid y) = (x \mid Py)$ para todos $x, y \in \mathcal{H}$.

Una **proyección ortogonal** en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un idempotente P tal que $\ker(P) = P(\mathcal{H})^{\perp}$.

Proposición. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ una aplicación lineal no nula. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
i) P es un idempotente autoadjunto, es decir: $P^2 = P$ y $(Px \mid y) = (x \mid Py)$ para todos $x, y \in \mathcal{H}$.
ii) P es la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $P(\mathcal{H})$.

Una **proyección ortogonal** en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un idempotente P tal que $\ker(P) = P(\mathcal{H})^{\perp}$.

Proposición. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ una aplicación lineal no nula. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
i) P es un idempotente autoadjunto, es decir: $P^2 = P$ y $(Px \mid y) = (x \mid Py)$ para todos $x, y \in \mathcal{H}$.
ii) P es la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $P(\mathcal{H})$.

Como consecuencia del teorema de la proyección ortogonal, es claro que en un espacio de Hilbert hay una correspondencia biunívoca entre subespacios cerrados y proyecciones ortogonales.

Una **proyección ortogonal** en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un idempotente P tal que $\ker(P) = P(\mathcal{H})^{\perp}$.

Proposición. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ una aplicación lineal no nula. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
i) P es un idempotente autoadjunto, es decir: $P^2 = P$ y $(Px \mid y) = (x \mid Py)$ para todos $x, y \in \mathcal{H}$.
ii) P es la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $P(\mathcal{H})$.

Como consecuencia del teorema de la proyección ortogonal, es claro que en un espacio de Hilbert hay una correspondencia biunívoca entre subespacios cerrados y proyecciones ortogonales.

Proposición. Sean P y Q dos proyecciones ortogonales en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces se verifica que $PQ = 0$ si, y sólo si, $Q(\mathcal{H}) \perp P(\mathcal{H})$, en cuyo caso $P + Q$ es la proyección ortogonal sobre $P(\mathcal{H}) + Q(\mathcal{H})$.

Una **proyección ortogonal** en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un idempotente P tal que $\ker(P) = P(\mathcal{H})^{\perp}$.

Proposición. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ una aplicación lineal no nula. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:
i) P es un idempotente autoadjunto, es decir: $P^2 = P$ y $(Px \mid y) = (x \mid Py)$ para todos $x, y \in \mathcal{H}$.
ii) P es la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $P(\mathcal{H})$.

Como consecuencia del teorema de la proyección ortogonal, es claro que en un espacio de Hilbert hay una correspondencia biunívoca entre subespacios cerrados y proyecciones ortogonales.

Proposición. Sean P y Q dos proyecciones ortogonales en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces se verifica que $PQ = 0$ si, y sólo si, $Q(\mathcal{H}) \perp P(\mathcal{H})$, en cuyo caso $P + Q$ es la proyección ortogonal sobre $P(\mathcal{H}) + Q(\mathcal{H})$.

De esta proposición se deduce que si M y N son subespacios cerrados de un espacio de Hilbert que son ortogonales, $M \perp N$, entonces $M + N$ es un subespacio cerrado. Lo mismo ocurre, claro está, para cualquier suma finita de subespacio cerrados ortogonales dos a dos.

Proposición. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea M_n un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y P_n la proyección ortogonal sobre M_n. Supongamos que dichos espacios son dos a dos ortogonales, esto es $M_p \perp M_q$ si $p \neq q$. Sea $M = \overline{\text{Lin}}\{\cup_{n=1}^{\infty} M_n\}$ y P_M la proyección ortogonal sobre M. Entonces para todo $x \in \mathcal{H}$ se verifica que $P_M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ y

$$\|P_M(x)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n(x)\|^2.$$

Proposición. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea M_n un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y P_n la proyección ortogonal sobre M_n. Supongamos que dichos espacios son dos a dos ortogonales, esto es $M_p \perp M_q$ si $p \neq q$. Sea $M = \overline{\text{Lin}}\{\cup_{n=1}^{\infty} M_n\}$ y P_M la proyección ortogonal sobre M. Entonces para todo $x \in \mathcal{H}$ se verifica que $P_M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ y

$$\|P_M(x)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n(x)\|^2.$$

El espacio M en la proposición anterior se llama **suma ortogonal o hilbertiana** de la familia de espacios $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ y se representa por $M = \bigoplus_{n=1}^{\infty} M_n$ y también $M = \perp_{n=1}^{\infty} M_n$.

Sea X un espacio normado. Un operador $T \in L(X)$ se dice de **rango finito** si la dimensión de su imagen, $T(X)$, es finita.

Sea X un espacio normado. Un operador $T \in L(X)$ se dice de **rango finito** si la dimensión de su imagen, $T(X)$, es finita.

En un espacio de Hilbert, $\mathcal{H}$, las proyecciones ortogonales sobre subespacios de dimensión finita, son operadores de rango finito. Una tal proyección es de la forma

$$P_M(x) = \sum_{k=1}^{n} (x \mid v_k) v_k \tag{10}$$

donde $\{v_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ es una base ortonormal de M.

Sea X un espacio normado. Un operador $T \in L(X)$ se dice de **rango finito** si la dimensión de su imagen, $T(X)$, es finita.

En un espacio de Hilbert, $\mathcal{H}$, las proyecciones ortogonales sobre subespacios de dimensión finita, son operadores de rango finito. Una tal proyección es de la forma

$$P_M(x) = \sum_{k=1}^{n} (x \mid v_k) v_k \tag{10}$$

donde $\{v_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ es una base ortonormal de M.

En general, si $T \in L(\mathcal{H})$ es un operador de rango finito y $\{v_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ es una base ortonormal de $T(\mathcal{H})$, se tiene que

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} (Tx \mid v_k) v_k = \sum_{k=1}^{n} (x \mid T^* v_k) v_k = \sum_{k=1}^{n} (x \mid u_k) v_k \tag{11}$$

donde hemos puesto $u_k = T^* v_k$.

Sea X un espacio normado. Un operador $T \in L(X)$ se dice de **rango finito** si la dimensión de su imagen, $T(X)$, es finita.

En un espacio de Hilbert, $\mathcal{H}$, las proyecciones ortogonales sobre subespacios de dimensión finita, son operadores de rango finito. Una tal proyección es de la forma

$$P_M(x) = \sum_{k=1}^{n} (x \mid v_k) v_k \tag{10}$$

donde $\{v_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ es una base ortonormal de M.

En general, si $T \in L(\mathcal{H})$ es un operador de rango finito y $\{v_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ es una base ortonormal de $T(\mathcal{H})$, se tiene que

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} (Tx \mid v_k) v_k = \sum_{k=1}^{n} (x \mid T^* v_k) v_k = \sum_{k=1}^{n} (x \mid u_k) v_k \tag{11}$$

donde hemos puesto $u_k = T^* v_k$.

Dados dos vectores $u, v \in \mathcal{H}$ se define $u \otimes v : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por

$$[u \otimes v](x) = (x \mid u) v \quad (x \in \mathcal{H})$$

Sea X un espacio normado. Un operador $T \in L(X)$ se dice de **rango finito** si la dimensión de su imagen, $T(X)$, es finita.

En un espacio de Hilbert, $\mathcal{H}$, las proyecciones ortogonales sobre subespacios de dimensión finita, son operadores de rango finito. Una tal proyección es de la forma

$$P_M(x) = \sum_{k=1}^{n} (x \mid v_k) v_k \tag{10}$$

donde $\{v_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ es una base ortonormal de M.

En general, si $T \in L(\mathcal{H})$ es un operador de rango finito y $\{v_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ es una base ortonormal de $T(\mathcal{H})$, se tiene que

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} (Tx \mid v_k) v_k = \sum_{k=1}^{n} (x \mid T^* v_k) v_k = \sum_{k=1}^{n} (x \mid u_k) v_k \tag{11}$$

donde hemos puesto $u_k = T^* v_k$.

Dados dos vectores $u, v \in \mathcal{H}$ se define $u \otimes v : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por

$$[u \otimes v](x) = (x \mid u) v \quad (x \in \mathcal{H})$$

La imagen de $u \otimes v$, supuesto $u \neq 0$, $v \neq 0$, es la recta vectorial $\mathbb{K} v$. Es fácil comprobar que $[u \otimes v]^* = v \otimes u$.

Podemos escribir ahora las igualdades (10) y (11) en las formas

$$P_M = \sum_{k=1}^{n} v_k \otimes v_k, \qquad T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$$

Podemos escribir ahora las igualdades (10) y (11) en las formas

$$P_M = \sum_{k=1}^{n} v_k \otimes v_k, \qquad T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$$

Representaremos $F(\mathcal{H})$ el conjunto de los operadores de rango finito en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Recogemos a continuación algunas propiedades elementales de los mismos.

Podemos escribir ahora las igualdades (10) y (11) en las formas

$$P_M = \sum_{k=1}^{n} v_k \otimes v_k, \qquad T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$$

Representaremos $F(\mathcal{H})$ el conjunto de los operadores de rango finito en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Recogemos a continuación algunas propiedades elementales de los mismos.

Proposición. El conjunto $F(\mathcal{H})$ de los operadores de rango finito de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, es el subespacio de $L(\mathcal{H})$ engendrado por el conjunto $\{u \otimes v \ : \ u, v \in \mathcal{H}\}$. Para $T \in F(\mathcal{H})$ se tiene que $T^* \in F(\mathcal{H})$ y, además, si $S \in L(\mathcal{H})$, se verifica que TS y ST están en $F(\mathcal{H})$.

Podemos escribir ahora las igualdades (10) y (11) en las formas

$$P_M = \sum_{k=1}^{n} v_k \otimes v_k\,, \qquad T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$$

Representaremos $F(\mathcal{H})$ el conjunto de los operadores de rango finito en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Recogemos a continuación algunas propiedades elementales de los mismos.

Proposición. El conjunto $F(\mathcal{H})$ de los operadores de rango finito de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, es el subespacio de $L(\mathcal{H})$ engendrado por el conjunto $\{u \otimes v \;:\; u, v \in \mathcal{H}\}$. Para $T \in F(\mathcal{H})$ se tiene que $T^* \in F(\mathcal{H})$ y, además, si $S \in L(\mathcal{H})$, se verifica que TS y ST están en $F(\mathcal{H})$.

Las propiedades expresadas en la proposición anterior pueden resumirse diciendo que $F(\mathcal{H})$ es un *ideal bilátero autoadjunto* de $L(\mathcal{H})$.

Podemos escribir ahora las igualdades (10) y (11) en las formas

$$P_M = \sum_{k=1}^{n} v_k \otimes v_k, \qquad T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$$

Representaremos $F(\mathcal{H})$ el conjunto de los operadores de rango finito en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Recogemos a continuación algunas propiedades elementales de los mismos.

Proposición. El conjunto $F(\mathcal{H})$ de los operadores de rango finito de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, es el subespacio de $L(\mathcal{H})$ engendrado por el conjunto $\{u \otimes v \ : \ u, v \in \mathcal{H}\}$. Para $T \in F(\mathcal{H})$ se tiene que $T^* \in F(\mathcal{H})$ y, además, si $S \in L(\mathcal{H})$, se verifica que TS y ST están en $F(\mathcal{H})$.

Las propiedades expresadas en la proposición anterior pueden resumirse diciendo que $F(\mathcal{H})$ es un *ideal bilátero autoadjunto* de $L(\mathcal{H})$.

Si $\mathcal{H}$ es de dimensión infinita entonces $F(\mathcal{H})$ no es cerrado en $L(\mathcal{H})$.

Podemos escribir ahora las igualdades (10) y (11) en las formas

$$P_M = \sum_{k=1}^{n} v_k \otimes v_k\,, \qquad T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$$

Representaremos $F(\mathcal{H})$ el conjunto de los operadores de rango finito en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Recogemos a continuación algunas propiedades elementales de los mismos.

Proposición. El conjunto $F(\mathcal{H})$ de los operadores de rango finito de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, es el subespacio de $L(\mathcal{H})$ engendrado por el conjunto $\{u \otimes v \ : \ u, v \in \mathcal{H}\}$. Para $T \in F(\mathcal{H})$ se tiene que $T^* \in F(\mathcal{H})$ y, además, si $S \in L(\mathcal{H})$, se verifica que TS y ST están en $F(\mathcal{H})$.

Las propiedades expresadas en la proposición anterior pueden resumirse diciendo que $F(\mathcal{H})$ es un *ideal bilátero autoadjunto* de $L(\mathcal{H})$.

Si $\mathcal{H}$ es de dimensión infinita entonces $F(\mathcal{H})$ no es cerrado en $L(\mathcal{H})$.Nos proponemos describir el cierre del espacio $F(\mathcal{H})$ en $L(\mathcal{H})$.

Podemos escribir ahora las igualdades (10) y (11) en las formas

$$P_M = \sum_{k=1}^{n} v_k \otimes v_k, \qquad T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$$

Representaremos $F(\mathcal{H})$ el conjunto de los operadores de rango finito en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Recogemos a continuación algunas propiedades elementales de los mismos.

Proposición. El conjunto $F(\mathcal{H})$ de los operadores de rango finito de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, es el subespacio de $L(\mathcal{H})$ engendrado por el conjunto $\{u \otimes v \ : \ u, v \in \mathcal{H}\}$. Para $T \in F(\mathcal{H})$ se tiene que $T^* \in F(\mathcal{H})$ y, además, si $S \in L(\mathcal{H})$, se verifica que TS y ST están en $F(\mathcal{H})$.

Las propiedades expresadas en la proposición anterior pueden resumirse diciendo que $F(\mathcal{H})$ es un *ideal bilátero autoadjunto* de $L(\mathcal{H})$.

Si $\mathcal{H}$ es de dimensión infinita entonces $F(\mathcal{H})$ no es cerrado en $L(\mathcal{H})$.Nos proponemos describir el cierre del espacio $F(\mathcal{H})$ en $L(\mathcal{H})$.Si $T \in F(\mathcal{H})$ y $B_{\mathcal{H}}$ es la bola unidad cerrada de $\mathcal{H}$, entonces $T(B_{\mathcal{H}})$ es un conjunto acotado y, como está contenido en el espacio de dimensión finita $T(\mathcal{H})$, se tiene que $\overline{T(B_{\mathcal{H}})}$ es compacto.

Podemos escribir ahora las igualdades (10) y (11) en las formas

$$P_M = \sum_{k=1}^{n} v_k \otimes v_k\,, \qquad T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$$

Representaremos $F(\mathcal{H})$ el conjunto de los operadores de rango finito en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Recogemos a continuación algunas propiedades elementales de los mismos.

Proposición. El conjunto $F(\mathcal{H})$ de los operadores de rango finito de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, es el subespacio de $L(\mathcal{H})$ engendrado por el conjunto $\{u \otimes v \ : \ u, v \in \mathcal{H}\}$. Para $T \in F(\mathcal{H})$ se tiene que $T^* \in F(\mathcal{H})$ y, además, si $S \in L(\mathcal{H})$, se verifica que TS y ST están en $F(\mathcal{H})$.

Las propiedades expresadas en la proposición anterior pueden resumirse diciendo que $F(\mathcal{H})$ es un *ideal bilátero autoadjunto* de $L(\mathcal{H})$.

Si $\mathcal{H}$ es de dimensión infinita entonces $F(\mathcal{H})$ no es cerrado en $L(\mathcal{H})$.Nos proponemos describir el cierre del espacio $F(\mathcal{H})$ en $L(\mathcal{H})$.Si $T \in F(\mathcal{H})$ y $B_{\mathcal{H}}$ es la bola unidad cerrada de $\mathcal{H}$, entonces $T(B_{\mathcal{H}})$ es un conjunto acotado y, como está contenido en el espacio de dimensión finita $T(\mathcal{H})$, se tiene que $\overline{T(B_{\mathcal{H}})}$ es compacto.Vamos a utilizar esta propiedad para definir una clase de operadores, pero antes recordemos algunos conceptos que vamos a necesitar.

Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subset X$ se dice que es **relativamente compacto** si su adherencia, $\overline{A}$, es compacto.

Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subset X$ se dice que es **relativamente compacto** si su adherencia, $\overline{A}$, es compacto.Esto equivale a que toda sucesión de puntos de A tenga alguna parcial convergente.

Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subset X$ se dice que es **relativamente compacto** si su adherencia, $\overline{A}$, es compacto.Esto equivale a que toda sucesión de puntos de A tenga alguna parcial convergente.Un conjunto $A \subset X$ se dice que es **totalmente acotado** si para todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset A$ tal que $A \subset \cup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$.

Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subset X$ se dice que es **relativamente compacto** si su adherencia, $\overline{A}$, es compacto.Esto equivale a que toda sucesión de puntos de A tenga alguna parcial convergente.Un conjunto $A \subset X$ se dice que es **totalmente acotado** si para todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset A$ tal que $A \subset \cup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$.Si (X, d) es un espacio métrico *completo* entonces se verifica que *un conjunto $A \subset X$ es relativamente compacto si, y sólo si, es totalmente acotado.*

Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subset X$ se dice que es **relativamente compacto** si su adherencia, $\overline{A}$, es compacto.Esto equivale a que toda sucesión de puntos de A tenga alguna parcial convergente.Un conjunto $A \subset X$ se dice que es **totalmente acotado** si para todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset A$ tal que $A \subset \cup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$.Si (X, d) es un espacio métrico *completo* entonces se verifica que *un conjunto $A \subset X$ es relativamente compacto si, y sólo si, es totalmente acotado.*

Un **operador compacto** en un espacio de *Banach* X es una aplicación lineal $T : X \to X$ tal que $T(B_X)$ es relativamente compacto en X o, equivalentemente, $T(B_X)$ es totalmente acotado en X.

Sea (X,d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subset X$ se dice que es **relativamente compacto** si su adherencia, $\overline{A}$, es compacto.Esto equivale a que toda sucesión de puntos de A tenga alguna parcial convergente.Un conjunto $A \subset X$ se dice que es **totalmente acotado** si para todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset A$ tal que $A \subset \cup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$.Si (X,d) es un espacio métrico *completo* entonces se verifica que *un conjunto $A \subset X$ es relativamente compacto si, y sólo si, es totalmente acotado.*

Un **operador compacto** en un espacio de *Banach* X es una aplicación lineal $T : X \to X$ tal que $T(B_X)$ es relativamente compacto en X o, equivalentemente, $T(B_X)$ es totalmente acotado en X.En tal caso, puesto que $T(B_X)$ está acotado, se tiene que $T \in L(X)$. Notaremos $K(X)$ el conjunto de todos los operadores compactos en un espacio de Banach X.

Proposición. Sea X un espacio de Banach. Equivalen

Sea (X,d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subset X$ se dice que es **relativamente compacto** si su adherencia, $\overline{A}$, es compacto.Esto equivale a que toda sucesión de puntos de A tenga alguna parcial convergente.Un conjunto $A \subset X$ se dice que es **totalmente acotado** si para todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset A$ tal que $A \subset \cup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$.Si (X,d) es un espacio métrico *completo* entonces se verifica que *un conjunto $A \subset X$ es relativamente compacto si, y sólo si, es totalmente acotado.*

Un **operador compacto** en un espacio de *Banach* X es una aplicación lineal $T : X \to X$ tal que $T(B_X)$ es relativamente compacto en X o, equivalentemente, $T(B_X)$ es totalmente acotado en X.En tal caso, puesto que $T(B_X)$ está acotado, se tiene que $T \in L(X)$. Notaremos $K(X)$ el conjunto de todos los operadores compactos en un espacio de Banach X.

Proposición. Sea X un espacio de Banach. Equivalen
a) $T \in K(X)$.

Sea (X,d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subset X$ se dice que es **relativamente compacto** si su adherencia, $\overline{A}$, es compacto.Esto equivale a que toda sucesión de puntos de A tenga alguna parcial convergente.Un conjunto $A \subset X$ se dice que es **totalmente acotado** si para todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset A$ tal que $A \subset \cup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$.Si (X,d) es un espacio métrico *completo* entonces se verifica que *un conjunto $A \subset X$ es relativamente compacto si, y sólo si, es totalmente acotado.*

Un **operador compacto** en un espacio de *Banach* X es una aplicación lineal $T : X \to X$ tal que $T(B_X)$ es relativamente compacto en X o, equivalentemente, $T(B_X)$ es totalmente acotado en X.En tal caso, puesto que $T(B_X)$ está acotado, se tiene que $T \in L(X)$. Notaremos $K(X)$ el conjunto de todos los operadores compactos en un espacio de Banach X.

Proposición. Sea X un espacio de Banach. Equivalen
a) $T \in K(X)$.
b) Para todo conjunto acotado $A \subset X$ el conjunto $T(A)$ es relativamente compacto.

Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subset X$ se dice que es **relativamente compacto** si su adherencia, $\overline{A}$, es compacto.Esto equivale a que toda sucesión de puntos de A tenga alguna parcial convergente.Un conjunto $A \subset X$ se dice que es **totalmente acotado** si para todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset A$ tal que $A \subset \cup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$.Si (X, d) es un espacio métrico *completo* entonces se verifica que *un conjunto $A \subset X$ es relativamente compacto si, y sólo si, es totalmente acotado.*

Un **operador compacto** en un espacio de *Banach* X es una aplicación lineal $T : X \to X$ tal que $T(B_X)$ es relativamente compacto en X o, equivalentemente, $T(B_X)$ es totalmente acotado en X.En tal caso, puesto que $T(B_X)$ está acotado, se tiene que $T \in L(X)$. Notaremos $K(X)$ el conjunto de todos los operadores compactos en un espacio de Banach X.

Proposición. Sea X un espacio de Banach. Equivalen
a) $T \in K(X)$.
b) Para todo conjunto acotado $A \subset X$ el conjunto $T(A)$ es relativamente compacto.
c) Para toda sucesión acotada $\{x_n\}$ en X, la sucesión $\{Tx_n\}$ tiene alguna parcial convergente.

Sea (X,d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subset X$ se dice que es **relativamente compacto** si su adherencia, $\overline{A}$, es compacto.Esto equivale a que toda sucesión de puntos de A tenga alguna parcial convergente.Un conjunto $A \subset X$ se dice que es **totalmente acotado** si para todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset A$ tal que $A \subset \cup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$.Si (X,d) es un espacio métrico *completo* entonces se verifica que *un conjunto $A \subset X$ es relativamente compacto si, y sólo si, es totalmente acotado.*

Un **operador compacto** en un espacio de *Banach* X es una aplicación lineal $T : X \to X$ tal que $T(B_X)$ es relativamente compacto en X o, equivalentemente, $T(B_X)$ es totalmente acotado en X.En tal caso, puesto que $T(B_X)$ está acotado, se tiene que $T \in L(X)$. Notaremos $K(X)$ el conjunto de todos los operadores compactos en un espacio de Banach X.

Proposición. Sea X un espacio de Banach. Equivalen
a) $T \in K(X)$.
b) Para todo conjunto acotado $A \subset X$ el conjunto $T(A)$ es relativamente compacto.
c) Para toda sucesión acotada $\{x_n\}$ en X, la sucesión $\{Tx_n\}$ tiene alguna parcial convergente.
Además, se verifica que $K(X)$ es un ideal bilátero cerrado de $L(X)$. Y si $T \in K(X)$ entonces $\overline{T(X)} = \overline{\mathrm{Lin}}(T(B_X))$ es separable.

Teorema. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $T \in K(\mathcal{H})$ y $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormal de $\overline{T(\mathcal{H})}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea P_n la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $M_n = \operatorname{Lin}(\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n\})$, entonces $\lim\{P_n T\} = T$ en $L(\mathcal{H})$. Por tanto $K(\mathcal{H}) = \overline{F(\mathcal{H})}$ y $K(\mathcal{H})$ es autoadjunto.

Teorema. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $T \in K(\mathcal{H})$ y $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormal de $\overline{T(\mathcal{H})}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea P_n la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $M_n = \mathrm{Lin}(\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n\})$, entonces $\lim\{P_n T\} = T$ en $L(\mathcal{H})$. Por tanto $K(\mathcal{H}) = \overline{F(\mathcal{H})}$ y $K(\mathcal{H})$ es autoadjunto.

Ejemplos. Un operador de multiplicación $M_\lambda : \ell_2 \to \ell_2$, donde $\lambda \in \ell_\infty$, es compacto si, y sólo si, $\lambda = \{\lambda_n\} \in c_0$.

Teorema. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $T \in K(\mathcal{H})$ y $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base ortonormal de $\overline{T(\mathcal{H})}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea P_n la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre $M_n = \mathrm{Lin}(\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n\})$, entonces $\lim\{P_n T\} = T$ en $L(\mathcal{H})$. Por tanto $K(\mathcal{H}) = \overline{F(\mathcal{H})}$ y $K(\mathcal{H})$ es autoadjunto.

Ejemplos. Un operador de multiplicación $M_\lambda : \ell_2 \to \ell_2$, donde $\lambda \in \ell_\infty$, es compacto si, y sólo si, $\lambda = \{\lambda_n\} \in c_0$.

Los operadores integrales definidos por (9) son compactos.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$. Un número $\lambda \in \mathbb{K}$ se llama un **valor propio** o un **autovalor** de T si $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$. Un número $\lambda \in \mathbb{K}$ se llama un **valor propio** o un **autovalor** de T si $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$.Todo vector no nulo $u \in \ker(T - \lambda I)$, es decir, tal que $Tu = \lambda u$, con $u \neq 0$, se dice que es un **vector propio** asociado al valor propio λ.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$. Un número $\lambda \in \mathbb{K}$ se llama un **valor propio** o un **autovalor** de T si $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$.Todo vector no nulo $u \in \ker(T - \lambda I)$, es decir, tal que $Tu = \lambda u$, con $u \neq 0$, se dice que es un **vector propio** asociado al valor propio λ.El espacio $\ker(T - \lambda I)$ se llama el **espacio propio** asociado al autovalor λ.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$. Un número $\lambda \in \mathbb{K}$ se llama un **valor propio** o un **autovalor** de T si $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$.Todo vector no nulo $u \in \ker(T - \lambda I)$, es decir, tal que $Tu = \lambda u$, con $u \neq 0$, se dice que es un **vector propio** asociado al valor propio λ.El espacio $\ker(T - \lambda I)$ se llama el **espacio propio** asociado al autovalor λ.Representaremos por $\sigma_p(T)$ el conjunto de los valores propios de T.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$. Un número $\lambda \in \mathbb{K}$ se llama un **valor propio** o un **autovalor** de T si $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$.Todo vector no nulo $u \in \ker(T - \lambda I)$, es decir, tal que $Tu = \lambda u$, con $u \neq 0$, se dice que es un **vector propio** asociado al valor propio λ.El espacio $\ker(T - \lambda I)$ se llama el **espacio propio** asociado al autovalor λ.Representaremos por $\sigma_p(T)$ el conjunto de los valores propios de T.

Proposición. Sea T un operador normal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$. Un número $\lambda \in \mathbb{K}$ se llama un **valor propio** o un **autovalor** de T si $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$.Todo vector no nulo $u \in \ker(T - \lambda I)$, es decir, tal que $Tu = \lambda u$, con $u \neq 0$, se dice que es un **vector propio** asociado al valor propio λ.El espacio $\ker(T - \lambda I)$ se llama el **espacio propio** asociado al autovalor λ.Representaremos por $\sigma_p(T)$ el conjunto de los valores propios de T.

Proposición. Sea T un operador normal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

a) $x \in \mathcal{H}$ es un vector propio de T con valor propio λ si, y sólo si, x es un vector propio de T^* con valor propio $\overline{\lambda}$. Por tanto $\ker(T - \lambda I) = \ker(T^* - \overline{\lambda} I)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$. Un número $\lambda \in \mathbb{K}$ se llama un **valor propio** o un **autovalor** de T si $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$.Todo vector no nulo $u \in \ker(T - \lambda I)$, es decir, tal que $Tu = \lambda u$, con $u \neq 0$, se dice que es un **vector propio** asociado al valor propio λ.El espacio $\ker(T - \lambda I)$ se llama el **espacio propio** asociado al autovalor λ.Representaremos por $\sigma_p(T)$ el conjunto de los valores propios de T.

Proposición. Sea T un operador normal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

a) $x \in \mathcal{H}$ es un vector propio de T con valor propio λ si, y sólo si, x es un vector propio de T^* con valor propio $\overline{\lambda}$. Por tanto $\ker(T - \lambda I) = \ker(T^* - \overline{\lambda} I)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.En particular, se verifica que

$$\sigma_p(T^*) = \left\{ \overline{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T) \right\}$$

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$. Un número $\lambda \in \mathbb{K}$ se llama un **valor propio** o un **autovalor** de T si $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$.Todo vector no nulo $u \in \ker(T - \lambda I)$, es decir, tal que $Tu = \lambda u$, con $u \neq 0$, se dice que es un **vector propio** asociado al valor propio λ.El espacio $\ker(T - \lambda I)$ se llama el **espacio propio** asociado al autovalor λ.Representaremos por $\sigma_p(T)$ el conjunto de los valores propios de T.

Proposición. Sea T un operador normal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

a) $x \in \mathcal{H}$ es un vector propio de T con valor propio λ si, y sólo si, x es un vector propio de T^* con valor propio $\overline{\lambda}$. Por tanto $\ker(T - \lambda I) = \ker(T^* - \overline{\lambda} I)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.En particular, se verifica que

$$\sigma_p(T^*) = \left\{ \overline{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T) \right\}$$

Además, $\ker(T - \lambda I)$ es un subespacio reductor para T.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$. Un número $\lambda \in \mathbb{K}$ se llama un **valor propio** o un **autovalor** de T si $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$.Todo vector no nulo $u \in \ker(T - \lambda I)$, es decir, tal que $Tu = \lambda u$, con $u \neq 0$, se dice que es un **vector propio** asociado al valor propio λ.El espacio $\ker(T - \lambda I)$ se llama el **espacio propio** asociado al autovalor λ.Representaremos por $\sigma_p(T)$ el conjunto de los valores propios de T.

Proposición. Sea T un operador normal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

a) $x \in \mathcal{H}$ es un vector propio de T con valor propio λ si, y sólo si, x es un vector propio de T^* con valor propio $\overline{\lambda}$. Por tanto $\ker(T - \lambda I) = \ker(T^* - \overline{\lambda} I)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.En particular, se verifica que

$$\sigma_p(T^*) = \left\{ \overline{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T) \right\}$$

Además, $\ker(T - \lambda I)$ es un subespacio reductor para T.

b) Si λ, μ son valores propios distintos de T, entonces los espacios propios $\ker(T - \lambda I)$ y $\ker(T - \mu I)$ son ortogonales. Por tanto, si P_λ y P_μ son las proyecciones ortogonales de $\mathcal{H}$ sobre dichos subespacios se tiene que $P_\lambda P_\mu = 0$.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$. Un número $\lambda \in \mathbb{K}$ se llama un **valor propio** o un **autovalor** de T si $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$.Todo vector no nulo $u \in \ker(T - \lambda I)$, es decir, tal que $Tu = \lambda u$, con $u \neq 0$, se dice que es un **vector propio** asociado al valor propio λ.El espacio $\ker(T - \lambda I)$ se llama el **espacio propio** asociado al autovalor λ.Representaremos por $\sigma_p(T)$ el conjunto de los valores propios de T.

Proposición. Sea T un operador normal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

a) $x \in \mathcal{H}$ es un vector propio de T con valor propio λ si, y sólo si, x es un vector propio de T^* con valor propio $\overline{\lambda}$. Por tanto $\ker(T - \lambda I) = \ker(T^* - \overline{\lambda} I)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.En particular, se verifica que

$$\sigma_p(T^*) = \left\{ \overline{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T) \right\}$$

Además, $\ker(T - \lambda I)$ es un subespacio reductor para T.

b) Si λ, μ son valores propios distintos de T, entonces los espacios propios $\ker(T - \lambda I)$ y $\ker(T - \mu I)$ son ortogonales. Por tanto, si P_λ y P_μ son las proyecciones ortogonales de $\mathcal{H}$ sobre dichos subespacios se tiene que $P_\lambda P_\mu = 0$.

Proposición. Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$ se verifica que el espacio $\ker(T - \lambda I)$ es de dimensión finita.

Proposición. Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$ se verifica que el espacio $\ker(T - \lambda I)$ es de dimensión finita.

Proposición. Sea T un operador compacto normal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces el conjunto de los valores propios de T es numerable, y si es infinito tiene a 0 como único punto de acumulación.

Proposición. Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$ se verifica que el espacio $\ker(T - \lambda I)$ es de dimensión finita.

Proposición. Sea T un operador compacto normal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces el conjunto de los valores propios de T es numerable, y si es infinito tiene a 0 como único punto de acumulación.

Proposición. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $S \in L(\mathcal{H})$ un operador compacto autoadjunto. Se verifica que $\sigma_p(S) \subset \mathbb{R}$ y existe un autovalor $\lambda \in \sigma_p(S)$ tal que $|\lambda| = \|S\|$.

Proposición. Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$ se verifica que el espacio $\ker(T - \lambda I)$ es de dimensión finita.

Proposición. Sea T un operador compacto normal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces el conjunto de los valores propios de T es numerable, y si es infinito tiene a 0 como único punto de acumulación.

Proposición. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $S \in L(\mathcal{H})$ un operador compacto autoadjunto. Se verifica que $\sigma_p(S) \subset \mathbb{R}$ y existe un autovalor $\lambda \in \sigma_p(S)$ tal que $|\lambda| = \|S\|$.Por tanto

$$\|S\| = \text{máx}\left\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(S)\right\}$$

Proposición. Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$ se verifica que el espacio $\ker(T - \lambda I)$ es de dimensión finita.

Proposición. Sea T un operador compacto normal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces el conjunto de los valores propios de T es numerable, y si es infinito tiene a 0 como único punto de acumulación.

Proposición. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $S \in L(\mathcal{H})$ un operador compacto autoadjunto. Se verifica que $\sigma_p(S) \subset \mathbb{R}$ y existe un autovalor $\lambda \in \sigma_p(S)$ tal que $|\lambda| = \|S\|$.Por tanto

$$\|S\| = \text{máx}\left\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(S)\right\}$$

Corolario. Para todo $T \in K(\mathcal{H})$ se verifica que

$$\|T\| = \text{máx}\left\{\sqrt{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T^*T)\right\}$$

Proposición. Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$ se verifica que el espacio $\ker(T - \lambda I)$ es de dimensión finita.

Proposición. Sea T un operador compacto normal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces el conjunto de los valores propios de T es numerable, y si es infinito tiene a 0 como único punto de acumulación.

Proposición. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $S \in L(\mathcal{H})$ un operador compacto autoadjunto. Se verifica que $\sigma_p(S) \subset \mathbb{R}$ y existe un autovalor $\lambda \in \sigma_p(S)$ tal que $|\lambda| = \|S\|$.Por tanto

$$\|S\| = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(S)\}$$

Corolario. Para todo $T \in K(\mathcal{H})$ se verifica que

$$\|T\| = \text{máx}\left\{\sqrt{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T^*T)\right\}$$

Proposición. Para todo operador T compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$ se verifica que $\sigma_p(T) \neq \emptyset$.

Proposición. Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$ se verifica que el espacio $\ker(T - \lambda I)$ es de dimensión finita.

Proposición. Sea T un operador compacto normal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces el conjunto de los valores propios de T es numerable, y si es infinito tiene a 0 como único punto de acumulación.

Proposición. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $S \in L(\mathcal{H})$ un operador compacto autoadjunto. Se verifica que $\sigma_p(S) \subset \mathbb{R}$ y existe un autovalor $\lambda \in \sigma_p(S)$ tal que $|\lambda| = \|S\|$.Por tanto

$$\|S\| = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(S)\}$$

Corolario. Para todo $T \in K(\mathcal{H})$ se verifica que

$$\|T\| = \text{máx}\left\{\sqrt{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T^*T)\right\}$$

Proposición. Para todo operador T compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$ se verifica que $\sigma_p(T) \neq \emptyset$.

En lo que sigue representaremos por E_λ el espacio propio $\ker(T - \lambda I)$ asociado a un valor propio λ de un operador compacto normal $T \in L(\mathcal{H})$.

En lo que sigue representaremos por E_λ el espacio propio $\ker(T - \lambda I)$ asociado a un valor propio λ de un operador compacto normal $T \in L(\mathcal{H})$.Sabemos que dichos espacios son dos a dos ortogonales y, si $\lambda \neq 0$, E_λ es de dimensión finita.

En lo que sigue representaremos por E_λ el espacio propio $\ker(T - \lambda I)$ asociado a un valor propio λ de un operador compacto normal $T \in L(\mathcal{H})$.Sabemos que dichos espacios son dos a dos ortogonales y, si $\lambda \neq 0$, E_λ es de dimensión finita.En el caso en que 0 sea un valor propio de T, esto es, que T no sea inyectivo, se tiene que $E_0 = \ker(T)$ puede tener cualquier dimensión.

En lo que sigue representaremos por E_λ el espacio propio $\ker(T - \lambda I)$ asociado a un valor propio λ de un operador compacto normal $T \in L(\mathcal{H})$.Sabemos que dichos espacios son dos a dos ortogonales y, si $\lambda \neq 0$, E_λ es de dimensión finita.En el caso en que 0 sea un valor propio de T, esto es, que T no sea inyectivo, se tiene que $E_0 = \ker(T)$ puede tener cualquier dimensión.Sabemos también que E_λ es un espacio reductor para T. Observa que si $\lambda \neq 0$ entonces $T(E_\lambda) = \lambda E_\lambda = E_\lambda$ y también $T^*(E_\lambda) = E_\lambda$.

En lo que sigue representaremos por E_λ el espacio propio $\ker(T-\lambda I)$ asociado a un valor propio λ de un operador compacto normal $T\in L(\mathcal{H})$.Sabemos que dichos espacios son dos a dos ortogonales y, si $\lambda\neq 0$, E_λ es de dimensión finita.En el caso en que 0 sea un valor propio de T, esto es, que T no sea inyectivo, se tiene que $E_0=\ker(T)$ puede tener cualquier dimensión.Sabemos también que E_λ es un espacio reductor para T. Observa que si $\lambda\neq 0$ entonces $T(E_\lambda)=\lambda E_\lambda=E_\lambda$ y también $T^*(E_\lambda)=E_\lambda$.

Teorema. Sea $T\neq 0$ un operador compacto normal en un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$. Entonces se verifica que $\mathcal{H}$ es la suma hilbertiana de los espacios propios de T.

$$\mathcal{H}=\bigoplus_{\lambda\in\sigma_p(T)} E_\lambda \tag{12}$$

En lo que sigue representaremos por E_λ el espacio propio $\ker(T-\lambda I)$ asociado a un valor propio λ de un operador compacto normal $T\in L(\mathcal{H})$.Sabemos que dichos espacios son dos a dos ortogonales y, si $\lambda\neq 0$, E_λ es de dimensión finita.En el caso en que 0 sea un valor propio de T, esto es, que T no sea inyectivo, se tiene que $E_0=\ker(T)$ puede tener cualquier dimensión.Sabemos también que E_λ es un espacio reductor para T. Observa que si $\lambda\neq 0$ entonces $T(E_\lambda)=\lambda E_\lambda=E_\lambda$ y también $T^*(E_\lambda)=E_\lambda$.

Teorema. Sea $T\neq 0$ un operador compacto normal en un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$. Entonces se verifica que $\mathcal{H}$ es la suma hilbertiana de los espacios propios de T.

$$\mathcal{H}=\bigoplus_{\lambda\in\sigma_p(T)} E_\lambda \tag{12}$$

Además

$$\overline{T(\mathcal{H})}=\bigoplus_{\lambda\in\sigma_p(T)\setminus\{0\}} E_\lambda \tag{13}$$

En lo que sigue representaremos por E_λ el espacio propio $\ker(T-\lambda I)$ asociado a un valor propio λ de un operador compacto normal $T\in L(\mathcal{H})$.Sabemos que dichos espacios son dos a dos ortogonales y, si $\lambda\neq 0$, E_λ es de dimensión finita.En el caso en que 0 sea un valor propio de T, esto es, que T no sea inyectivo, se tiene que $E_0=\ker(T)$ puede tener cualquier dimensión.Sabemos también que E_λ es un espacio reductor para T. Observa que si $\lambda\neq 0$ entonces $T(E_\lambda)=\lambda E_\lambda=E_\lambda$ y también $T^*(E_\lambda)=E_\lambda$.

Teorema. Sea $T\neq 0$ un operador compacto normal en un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$. Entonces se verifica que $\mathcal{H}$ es la suma hilbertiana de los espacios propios de T.

$$\mathcal{H}=\bigoplus_{\lambda\in\sigma_p(T)} E_\lambda \tag{12}$$

Además

$$\overline{T(\mathcal{H})}=\bigoplus_{\lambda\in\sigma_p(T)\setminus\{0\}} E_\lambda \tag{13}$$

Se verifica también que $\overline{T(\mathcal{H})}=\overline{T^*(\mathcal{H})}$.

En lo que sigue representaremos por E_λ el espacio propio $\ker(T-\lambda I)$ asociado a un valor propio λ de un operador compacto normal $T\in L(\mathcal{H})$.Sabemos que dichos espacios son dos a dos ortogonales y, si $\lambda\neq 0$, E_λ es de dimensión finita.En el caso en que 0 sea un valor propio de T, esto es, que T no sea inyectivo, se tiene que $E_0=\ker(T)$ puede tener cualquier dimensión.Sabemos también que E_λ es un espacio reductor para T. Observa que si $\lambda\neq 0$ entonces $T(E_\lambda)=\lambda E_\lambda=E_\lambda$ y también $T^*(E_\lambda)=E_\lambda$.

Teorema. Sea $T\neq 0$ un operador compacto normal en un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$. Entonces se verifica que $\mathcal{H}$ es la suma hilbertiana de los espacios propios de T.

$$\mathcal{H}=\bigoplus_{\lambda\in\sigma_p(T)} E_\lambda \tag{12}$$

Además

$$\overline{T(\mathcal{H})}=\bigoplus_{\lambda\in\sigma_p(T)\setminus\{0\}} E_\lambda \tag{13}$$

Se verifica también que $\overline{T(\mathcal{H})}=\overline{T^*(\mathcal{H})}$.

Observa que si P_λ es la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre E_λ se tiene que $TP_\lambda=\lambda P_\lambda$.

En lo que sigue representaremos por E_λ el espacio propio $\ker(T-\lambda I)$ asociado a un valor propio λ de un operador compacto normal $T \in L(\mathcal{H})$.Sabemos que dichos espacios son dos a dos ortogonales y, si $\lambda \neq 0$, E_λ es de dimensión finita.En el caso en que 0 sea un valor propio de T, esto es, que T no sea inyectivo, se tiene que $E_0 = \ker(T)$ puede tener cualquier dimensión.Sabemos también que E_λ es un espacio reductor para T. Observa que si $\lambda \neq 0$ entonces $T(E_\lambda) = \lambda E_\lambda = E_\lambda$ y también $T^*(E_\lambda) = E_\lambda$.

Teorema. Sea $T \neq 0$ un operador compacto normal en un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$. Entonces se verifica que $\mathcal{H}$ es la suma hilbertiana de los espacios propios de T.

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T)} E_\lambda \tag{12}$$

Además

$$\overline{T(\mathcal{H})} = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T)\setminus\{0\}} E_\lambda \tag{13}$$

Se verifica también que $\overline{T(\mathcal{H})} = \overline{T^*(\mathcal{H})}$.

Observa que si P_λ es la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre E_λ se tiene que $TP_\lambda = \lambda P_\lambda$. Ya está todo preparado para obtener la representación espectral de nuestro operador compacto normal T. Por claridad en la exposición vamos a tratar por separado el caso en que $\sigma_p(T)$ es finito y el caso en que $\sigma_p(T)$ es infinito.

Teorema Espectral. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathcal{H})$ un operador compacto normal. Equivalen las afirmaciones siguientes

Teorema Espectral. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathcal{H})$ un operador compacto normal. Equivalen las afirmaciones siguientes

a) $T(\mathcal{H})$ es de dimensión finita.

Teorema Espectral. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathcal{H})$ un operador compacto normal. Equivalen las afirmaciones siguientes

a) $T(\mathcal{H})$ es de dimensión finita.

b) $\sigma_p(T)$ es finito, es decir, T tiene solamente un número finito λ_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, de valores propios distintos.

Teorema Espectral. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathcal{H})$ un operador compacto normal. Equivalen las afirmaciones siguientes

a) $T(\mathcal{H})$ es de dimensión finita.

b) $\sigma_p(T)$ es finito, es decir, T tiene solamente un número finito λ_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, de valores propios distintos.

En tal caso, poniendo $E_k = E_{\lambda_k}$, y llamando P_k a la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre E_k, se verifica que

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k=1}^{N} E_k; \quad I = \sum_{k=1}^{N} P_k; \quad T = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k P_k \tag{14}$$

Teorema Espectral. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathcal{H})$ un operador compacto normal. Equivalen las afirmaciones siguientes

a) $T(\mathcal{H})$ es de dimensión finita.

b) $\sigma_p(T)$ es finito, es decir, T tiene solamente un número finito λ_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, de valores propios distintos.

En tal caso, poniendo $E_k = E_{\lambda_k}$, y llamando P_k a la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre E_k, se verifica que

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k=1}^{N} E_k; \quad I = \sum_{k=1}^{N} P_k; \quad T = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k P_k \tag{14}$$

Además, si B_k es una base ortonormal de E_k, entonces $B = \bigcup_{k=1}^{N} B_k$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$ formada por vectores propios de T. Y si $0 \notin \sigma_p(T)$ entonces $\mathcal{H}$ es de dimensión finita y T es inversible.

Con las mismas hipótesis y notaciones del teorema anterior, suponiendo que $\sigma_p(T)$ es finito, y llamando B_1 a los elementos de B que no están en $\ker(T)$, se tiene que B_1 es una base ortonormal finita de $T(\mathcal{H})$, y si enumeramos sus elementos $B_1 = \{u_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ y *renombramos* los valores propios llamando α_i al valor propio que corresponde al vector propio u_i (por tanto, cada λ_k se repite en la sucesión de los α_i un número de veces igual a la dimensión de E_k), se tiene que para todo $x \in \mathcal{H}$ es

$$\begin{aligned} Tx &= \sum_{i=1}^{n} (Tx \mid u_i) u_i = \sum_{i=1}^{n} (x \mid T^* u_i) u_i = \sum_{i=1}^{n} (x \mid \overline{\alpha_i} u_i) u_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x \mid u_i) u_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (u_i \otimes u_i)(x) \end{aligned}$$

Con las mismas hipótesis y notaciones del teorema anterior, suponiendo que $\sigma_p(T)$ es finito, y llamando B_1 a los elementos de B que no están en $\ker(T)$, se tiene que B_1 es una base ortonormal finita de $T(\mathcal{H})$, y si enumeramos sus elementos $B_1 = \{u_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ y *renombramos* los valores propios llamando α_i al valor propio que corresponde al vector propio u_i (por tanto, cada λ_k se repite en la sucesión de los α_i un número de veces igual a la dimensión de E_k), se tiene que para todo $x \in \mathcal{H}$ es

$$\begin{aligned} Tx &= \sum_{i=1}^{n} (Tx \mid u_i) u_i = \sum_{i=1}^{n} (x \mid T^* u_i) u_i = \sum_{i=1}^{n} (x \mid \overline{\alpha_i} u_i) u_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x \mid u_i) u_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (u_i \otimes u_i)(x) \end{aligned}$$

Es decir

$$T = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \otimes u_i$$

Teorema Espectral. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathcal{H})$ un operador compacto normal. Supongamos que $\sigma_p(T)$ es infinito y sea $\sigma_p(T) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ una enumeración cualquiera de $\sigma_p(T)$. Pongamos $E_k = E_{\lambda_k}$, y sea P_k a la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre E_k, se verifica entonces que

Teorema Espectral. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathcal{H})$ un operador compacto normal. Supongamos que $\sigma_p(T)$ es infinito y sea $\sigma_p(T) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ una enumeración cualquiera de $\sigma_p(T)$. Pongamos $E_k = E_{\lambda_k}$, y sea P_k a la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre E_k, se verifica entonces que

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} E_k; \quad T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k \tag{15}$$

donde la serie converge en el espacio de Banach $L(\mathcal{H})$.

Teorema Espectral. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathcal{H})$ un operador compacto normal. Supongamos que $\sigma_p(T)$ es infinito y sea $\sigma_p(T) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ una enumeración cualquiera de $\sigma_p(T)$. Pongamos $E_k = E_{\lambda_k}$, y sea P_k a la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre E_k, se verifica entonces que

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} E_k; \quad T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k \tag{15}$$

donde la serie converge en el espacio de Banach $L(\mathcal{H})$.Además, se verifica que

$$\|T\| = \text{máx}\left\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(T)\right\} \tag{16}$$

Teorema Espectral. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathcal{H})$ un operador compacto normal. Supongamos que $\sigma_p(T)$ es infinito y sea $\sigma_p(T) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ una enumeración cualquiera de $\sigma_p(T)$. Pongamos $E_k = E_{\lambda_k}$, y sea P_k a la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre E_k, se verifica entonces que

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} E_k; \quad T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k \tag{15}$$

donde la serie converge en el espacio de Banach $L(\mathcal{H})$.Además, se verifica que

$$\|T\| = \text{máx}\left\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(T)\right\} \tag{16}$$

Si B_k es una base ortonormal de E_k, entonces $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$ formada por vectores propios de T. Y si $0 \notin \sigma_p(T)$ entonces $\mathcal{H}$ es separable.

Con las mismas hipótesis y notaciones del teorema anterior, suponiendo que $\sigma_p(T)$ es infinito, y llamando B_1 a los elementos de B que no están en $\ker(T)$, se tiene que B_1 es una base ortonormal numerable infinita del espacio de Hilbert $\overline{T(\mathcal{H})}$, y si enumeramos sus elementos $B_1 = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ y *renombramos* los valores propios llamando α_n al valor propio que corresponde al vector propio u_n (por tanto, cada λ_n se repite en la sucesión de los α_k un número de veces igual a la dimensión de E_n), se tiene que para todo $x \in \mathcal{H}$ es

$$\begin{aligned} Tx &= \sum_{n=1}^{\infty} (Tx \mid u_n) u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x \mid T^* u_n) u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x \mid \overline{\alpha_n} u_n) u_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x \mid u_n) u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (u_n \otimes u_n)(x) \end{aligned}$$

Con las mismas hipótesis y notaciones del teorema anterior, suponiendo que $\sigma_p(T)$ es infinito, y llamando B_1 a los elementos de B que no están en $\ker(T)$, se tiene que B_1 es una base ortonormal numerable infinita del espacio de Hilbert $\overline{T(\mathcal{H})}$, y si enumeramos sus elementos $B_1 = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ y *renombramos* los valores propios llamando α_n al valor propio que corresponde al vector propio u_n (por tanto, cada λ_n se repite en la sucesión de los α_k un número de veces igual a la dimensión de E_n), se tiene que para todo $x \in \mathcal{H}$ es

$$\begin{aligned} Tx &= \sum_{n=1}^{\infty} (Tx \mid u_n) u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x \mid T^* u_n) u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x \mid \overline{\alpha_n} u_n) u_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x \mid u_n) u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (u_n \otimes u_n)(x) \end{aligned}$$

Es decir

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \otimes u_n \tag{17}$$

serie que converge en $L(\mathcal{H})$.

Un operador $T \in L(\mathcal{H})$ donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, se dice que es **diagonalizable**, si existe una base ortonormal de $\mathcal{H}$, $B = \{u_i : i \in I\}$, formada por vectores propios de T, es decir $T(u_i) = \lambda_i u_i$ donde $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Observa que un operador $T \in L(\mathcal{H})$ queda determinado de manera única por sus valores en los vectores de una base ortonormal ya que, por definición de la misma, $\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Lin}}(\{u_i : i \in I\})$.

Un operador $T \in L(\mathcal{H})$ donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, se dice que es **diagonalizable**, si existe una base ortonormal de $\mathcal{H}$, $B = \{u_i : i \in I\}$, formada por vectores propios de T, es decir $T(u_i) = \lambda_i u_i$ donde $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Observa que un operador $T \in L(\mathcal{H})$ queda determinado de manera única por sus valores en los vectores de una base ortonormal ya que, por definición de la misma, $\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Lin}}(\{u_i : i \in I\})$.Además, si T es diagonalizable también T^* lo es, pues si $i \neq j$ se tiene que

$$0 = \left(\lambda_i u_i \mid u_j\right) = \left(Tu_i \mid u_j\right) = \left(u_i \mid T^*(u_j)\right)$$

Un operador $T \in L(\mathcal{H})$ donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, se dice que es **diagonalizable**, si existe una base ortonormal de $\mathcal{H}$, $B = \{u_i : i \in I\}$, formada por vectores propios de T, es decir $T(u_i) = \lambda_i u_i$ donde $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Observa que un operador $T \in L(\mathcal{H})$ queda determinado de manera única por sus valores en los vectores de una base ortonormal ya que, por definición de la misma, $\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Lin}}(\{u_i : i \in I\})$.Además, si T es diagonalizable también T^* lo es, pues si $i \neq j$ se tiene que

$$0 = (\lambda_i u_i \mid u_j) = (Tu_i \mid u_j) = (u_i \mid T^*(u_j))$$

lo que nos dice que $T^*(u_j)$ es ortogonal a $B \setminus \{u_j\}$ lo que imlica que $T^* u_j = \alpha_j u_j$ y deducimos que

$$\lambda_j = (Tu_j \mid u_j) = (u_j \mid T^* u_j) = (u_j \mid \alpha_j u_j) = \overline{\alpha_j}$$

Un operador $T \in L(\mathcal{H})$ donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, se dice que es **diagonalizable**, si existe una base ortonormal de $\mathcal{H}$, $B = \{u_i : i \in I\}$, formada por vectores propios de T, es decir $T(u_i) = \lambda_i u_i$ donde $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Observa que un operador $T \in L(\mathcal{H})$ queda determinado de manera única por sus valores en los vectores de una base ortonormal ya que, por definición de la misma, $\mathcal{H} = \overline{\text{Lin}}(\{u_i : i \in I\})$.Además, si T es diagonalizable también T^* lo es, pues si $i \neq j$ se tiene que

$$0 = (\lambda_i u_i \mid u_j) = (Tu_i \mid u_j) = (u_i \mid T^*(u_j))$$

lo que nos dice que $T^*(u_j)$ es ortogonal a $B \setminus \{u_j\}$ lo que imlica que $T^* u_j = \alpha_j u_j$ y deducimos que

$$\lambda_j = (Tu_j \mid u_j) = (u_j \mid T^* u_j) = (u_j \mid \alpha_j u_j) = \overline{\alpha_j}$$

Por tanto, $\alpha_j = \overline{\lambda_j}$ y $T^*(u_j) = \overline{\lambda_j} u_j$.

Un operador $T \in L(\mathcal{H})$ donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, se dice que es **diagonalizable**, si existe una base ortonormal de $\mathcal{H}$, $B = \{u_i : i \in I\}$, formada por vectores propios de T, es decir $T(u_i) = \lambda_i u_i$ donde $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Observa que un operador $T \in L(\mathcal{H})$ queda determinado de manera única por sus valores en los vectores de una base ortonormal ya que, por definición de la misma, $\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Lin}}(\{u_i : i \in I\})$.Además, si T es diagonalizable también T^* lo es, pues si $i \neq j$ se tiene que

$$0 = \big(\lambda_i u_i \mid u_j\big) = \big(Tu_i \mid u_j\big) = \big(u_i \mid T^*(u_j)\big)$$

lo que nos dice que $T^*(u_j)$ es ortogonal a $B \setminus \big\{u_j\big\}$ lo que imlica que $T^* u_j = \alpha_j u_j$ y deducimos que

$$\lambda_j = \big(Tu_j \mid u_j\big) = \big(u_j \mid T^* u_j\big) = \big(u_j \mid \alpha_j u_j\big) = \overline{\alpha_j}$$

Por tanto, $\alpha_j = \overline{\lambda_j}$ y $T^*(u_j) = \overline{\lambda_j} u_j$.Por tanto, para todo $i \in I$, $TT^*(u_i) = T^*T(u_i) = |\lambda_i|^2 u_i$, y concluimos que T es un operador normal.

Un operador $T \in L(\mathcal{H})$ donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, se dice que es **diagonalizable**, si existe una base ortonormal de $\mathcal{H}$, $B = \{u_i : i \in I\}$, formada por vectores propios de T, es decir $T(u_i) = \lambda_i u_i$ donde $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Observa que un operador $T \in L(\mathcal{H})$ queda determinado de manera única por sus valores en los vectores de una base ortonormal ya que, por definición de la misma, $\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Lin}}(\{u_i : i \in I\})$.Además, si T es diagonalizable también T^* lo es, pues si $i \neq j$ se tiene que

$$0 = \left(\lambda_i u_i \mid u_j\right) = \left(Tu_i \mid u_j\right) = \left(u_i \mid T^*(u_j)\right)$$

lo que nos dice que $T^*(u_j)$ es ortogonal a $B \setminus \left\{u_j\right\}$ lo que imlica que $T^* u_j = \alpha_j u_j$ y deducimos que

$$\lambda_j = \left(Tu_j \mid u_j\right) = \left(u_j \mid T^* u_j\right) = \left(u_j \mid \alpha_j u_j\right) = \overline{\alpha_j}$$

Por tanto, $\alpha_j = \overline{\lambda_j}$ y $T^*(u_j) = \overline{\lambda_j} u_j$.Por tanto, para todo $i \in I$, $TT^*(u_i) = T^*T(u_i) = |\lambda_i|^2 u_i$, y concluimos que T es un operador normal.Por tanto, *todo operador diagonalizable es normal*.

Un operador $T \in L(\mathcal{H})$ donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, se dice que es **diagonalizable**, si existe una base ortonormal de $\mathcal{H}$, $B = \{u_i : i \in I\}$, formada por vectores propios de T, es decir $T(u_i) = \lambda_i u_i$ donde $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Observa que un operador $T \in L(\mathcal{H})$ queda determinado de manera única por sus valores en los vectores de una base ortonormal ya que, por definición de la misma, $\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Lin}}(\{u_i : i \in I\})$.Además, si T es diagonalizable también T^* lo es, pues si $i \neq j$ se tiene que

$$0 = \left(\lambda_i u_i \mid u_j\right) = \left(Tu_i \mid u_j\right) = \left(u_i \mid T^*(u_j)\right)$$

lo que nos dice que $T^*(u_j)$ es ortogonal a $B \setminus \left\{u_j\right\}$ lo que imlica que $T^* u_j = \alpha_j u_j$ y deducimos que

$$\lambda_j = \left(Tu_j \mid u_j\right) = \left(u_j \mid T^* u_j\right) = \left(u_j \mid \alpha_j u_j\right) = \overline{\alpha_j}$$

Por tanto, $\alpha_j = \overline{\lambda_j}$ y $T^*(u_j) = \overline{\lambda_j} u_j$.Por tanto, para todo $i \in I$, $TT^*(u_i) = T^*T(u_i) = |\lambda_i|^2 u_i$, y concluimos que T es un operador normal.Por tanto, *todo operador diagonalizable es normal*.

Como consecuencia del Teorema Espectral, sabemos que un operador compacto normal en un espacio de Hilbert complejo es diagonalizable. Concluimos que *un operador compacto en un espacio de Hilbert complejo es diagonalizable si, y sólo si, es normal*.

Diagonalización ortogonal de matrices. Consideremos $\mathbb{C}^n$ con el producto escalar usual

$$(x \mid y) = x^t \cdot \overline{y} = \sum_{k=1}^{n} x(k)\overline{y(k)} \qquad (x, y \in \mathbb{C}^n)$$

donde x e y representan vectores columna, la letra t significa transposición matricial y el punto "$\cdot$" representa producto de matrices.

Diagonalización ortogonal de matrices. Consideremos $\mathbb{C}^n$ con el producto escalar usual

$$(x \mid y) = x^t \cdot \overline{y} = \sum_{k=1}^{n} x(k)\overline{y(k)} \qquad (x, y \in \mathbb{C}^n)$$

donde x e y representan vectores columna, la letra t significa transposición matricial y el punto "·" representa producto de matrices.Sea $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un operador lineal (automáticamente continuo y compacto). Fijada una base en $\mathbb{C}^n$, podemos representar T y su adjunto por sendas matrices

$A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

Diagonalización ortogonal de matrices. Consideremos $\mathbb{C}^n$ con el producto escalar usual

$$(x \mid y) = x^t \cdot \overline{y} = \sum_{k=1}^{n} x(k)\overline{y(k)} \qquad (x, y \in \mathbb{C}^n)$$

donde x e y representan vectores columna, la letra t significa transposición matricial y el punto "$\cdot$" representa producto de matrices.Sea $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un operador lineal (automáticamente continuo y compacto). Fijada una base en $\mathbb{C}^n$, podemos representar T y su adjunto por sendas matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.Sabemos que $B = \overline{A}^t$. Notaremos $A^* = \overline{A}^t$.

Diagonalización ortogonal de matrices. Consideremos $\mathbb{C}^n$ con el producto escalar usual

$$(x \mid y) = x^t \cdot \overline{y} = \sum_{k=1}^{n} x(k)\overline{y(k)} \qquad (x, y \in \mathbb{C}^n)$$

donde x e y representan vectores columna, la letra t significa transposición matricial y el punto "$\cdot$" representa producto de matrices.Sea $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un operador lineal (automáticamente continuo y compacto). Fijada una base en $\mathbb{C}^n$, podemos representar T y su adjunto por sendas matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.Sabemos que $B = \overline{A}^t$. Notaremos $A^* = \overline{A}^t$.

Una matriz, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, se dice que es **hermitiana o autoadjunta** si $A = A^*$, **normal** si $A \cdot A^* = A^* \cdot A$, **unitaria** si $A^* = A^{-1}$.

Diagonalización ortogonal de matrices. Consideremos $\mathbb{C}^n$ con el producto escalar usual

$$(x \mid y) = x^t \cdot \overline{y} = \sum_{k=1}^{n} x(k)\overline{y(k)} \qquad (x, y \in \mathbb{C}^n)$$

donde x e y representan vectores columna, la letra t significa transposición matricial y el punto "$\cdot$" representa producto de matrices.Sea $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un operador lineal (automáticamente continuo y compacto). Fijada una base en $\mathbb{C}^n$, podemos representar T y su adjunto por sendas matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.Sabemos que $B = \overline{A}^t$. Notaremos $A^* = \overline{A}^t$.

Una matriz, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, se dice que es **hermitiana o autoadjunta** si $A = A^*$, **normal** si $A \cdot A^* = A^* \cdot A$, **unitaria** si $A^* = A^{-1}$.

Las matrices reales hermitianas se llaman matrices **simétricas**, y las matrices reales unitarias se llaman matrices **ortogonales**.

Diagonalización ortogonal de matrices. Consideremos $\mathbb{C}^n$ con el producto escalar usual

$$(x \mid y) = x^t \cdot \overline{y} = \sum_{k=1}^{n} x(k)\overline{y(k)} \qquad (x, y \in \mathbb{C}^n)$$

donde x e y representan vectores columna, la letra t significa transposición matricial y el punto "$\cdot$" representa producto de matrices.Sea $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un operador lineal (automáticamente continuo y compacto). Fijada una base en $\mathbb{C}^n$, podemos representar T y su adjunto por sendas matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.Sabemos que $B = \overline{A}^t$. Notaremos $A^* = \overline{A}^t$.

Una matriz, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, se dice que es **hermitiana o autoadjunta** si $A = A^*$, **normal** si $A \cdot A^* = A^* \cdot A$, **unitaria** si $A^* = A^{-1}$.

Las matrices reales hermitianas se llaman matrices **simétricas**, y las matrices reales unitarias se llaman matrices **ortogonales**.

Claramente, si $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ es un operador lineal y A es su matriz en una base de $\mathbb{C}^n$, entonces T es autoadjunto, normal o unitario si, y sólo si, A es hermitiana, normal o unitaria respectivamente.

Diagonalización ortogonal de matrices. Consideremos $\mathbb{C}^n$ con el producto escalar usual

$$(x \mid y) = x^t \cdot \overline{y} = \sum_{k=1}^{n} x(k)\overline{y(k)} \qquad (x, y \in \mathbb{C}^n)$$

donde x e y representan vectores columna, la letra t significa transposición matricial y el punto "$\cdot$" representa producto de matrices.Sea $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un operador lineal (automáticamente continuo y compacto). Fijada una base en $\mathbb{C}^n$, podemos representar T y su adjunto por sendas matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.Sabemos que $B = \overline{A}^t$. Notaremos $A^* = \overline{A}^t$.

Una matriz, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, se dice que es **hermitiana o autoadjunta** si $A = A^*$, **normal** si $A \cdot A^* = A^* \cdot A$, **unitaria** si $A^* = A^{-1}$.

Las matrices reales hermitianas se llaman matrices **simétricas**, y las matrices reales unitarias se llaman matrices **ortogonales**.

Claramente, si $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ es un operador lineal y A es su matriz en una base de $\mathbb{C}^n$, entonces T es autoadjunto, normal o unitario si, y sólo si, A es hermitiana, normal o unitaria respectivamente.Análoga observación puede hacerse para operadores lineales $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, un tal operador es simétrico (autoadjunto) u ortogonal (unitario) cuando su matriz en una base de $\mathbb{R}^n$ es simétrica u ortogonal respectivamente.

Se dice que dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ son **unitariamente equivalentes** si existe una matriz unitaria $U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A = U \cdot B \cdot U^*$.

Se dice que dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ son **unitariamente equivalentes** si existe una matriz unitaria $U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A = U \cdot B \cdot U^*$.Si una matriz A es unitariamente equivalente a una matriz diagonal D es inmediato comprobar que A es normal.

Se dice que dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ son **unitariamente equivalentes** si existe una matriz unitaria $U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A = U \cdot B \cdot U^*$.Si una matriz A es unitariamente equivalente a una matriz diagonal D es inmediato comprobar que A es normal.

En el caso complejo, el teorema espectral nos da la afirmación recíproca, pues si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ es una matriz normal, y consideramos el operador lineal en $\mathbb{C}^n$, $x \mapsto A \cdot x$, dicho teorema implica que existe una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$, $\{u_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$, y números $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ tales que

$$x = \sum_{k=1}^{n} (x \mid u_k) u_k \implies A \cdot x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x \mid u_k) u_k$$

Se dice que dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ son **unitariamente equivalentes** si existe una matriz unitaria $U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A = U \cdot B \cdot U^*$.Si una matriz A es unitariamente equivalente a una matriz diagonal D es inmediato comprobar que A es normal.

En el caso complejo, el teorema espectral nos da la afirmación recíproca, pues si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ es una matriz normal, y consideramos el operador lineal en $\mathbb{C}^n$, $x \mapsto A \cdot x$, dicho teorema implica que existe una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$, $\{u_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$, y números $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ tales que

$$x = \sum_{k=1}^{n} (x \mid u_k) u_k \implies A \cdot x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x \mid u_k) u_k$$

Igualdad que podemos escribir como sigue.

$$A \cdot x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \,(x \mid u_k)\, u_k = \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1\,(x \mid u_1) \\ \vdots \\ \lambda_n\,(x \mid u_n) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^t \cdot \overline{u_1} \\ \vdots \\ x^t \cdot \overline{u_n} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} - & \overline{u_1} & - \\ & \vdots & \\ - & \overline{u_n} & - \end{bmatrix} \cdot x = U \cdot D \cdot U^* \cdot x$$

$$A \cdot x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x \mid u_k) u_k = \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 (x \mid u_1) \\ \vdots \\ \lambda_n (x \mid u_n) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^t \cdot \overline{u_1} \\ \vdots \\ x^t \cdot \overline{u_n} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} - & \overline{u_1} & - \\ & \vdots & \\ - & \overline{u_n} & - \end{bmatrix} \cdot x = U \cdot D \cdot U^* \cdot x$$

Donde U es la matriz unitaria cuyas columnas son los vectores $u_1, u_2, \dots, u_n$, y $D = (d_{ij})$ es la matriz diagonal dada por $d_{ii} = \lambda_i$, $d_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

$$A\cdot x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,(x\mid u_k)\,u_k=\begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\lambda_1\,(x\mid u_1)\\ \vdots \\ \lambda_n\,(x\mid u_n)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x^t\cdot\overline{u_1}\\ \vdots \\ x^t\cdot\overline{u_n}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}- & \overline{u_1} & - \\ & \vdots & \\ - & \overline{u_n} & -\end{bmatrix}\cdot x=U\cdot D\cdot U^*\cdot x$$

Donde U es la matriz unitaria cuyas columnas son los vectores $u_1,u_2,\dots,u_n$, y $D=(d_{ij})$ es la matriz diagonal dada por $d_{ii}=\lambda_i$, $d_{ij}=0$ para $i\neq j$.Deducimos que $A=U\cdot D\cdot U^*$, lo que prueba que A es unitariamente equivalente a una matriz diagonal.

Un resultado análogo se obtiene para matrices simétricas reales $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Podemos enunciar ambos resultados conjuntamente para matrices autoadjuntas reales o complejas. Observa que entonces los valores propios son reales.

Un resultado análogo se obtiene para matrices simétricas reales $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Podemos enunciar ambos resultados conjuntamente para matrices autoadjuntas reales o complejas. Observa que entonces los valores propios son reales.

Teorema. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

Un resultado análogo se obtiene para matrices simétricas reales $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Podemos enunciar ambos resultados conjuntamente para matrices autoadjuntas reales o complejas. Observa que entonces los valores propios son reales.

Teorema. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) A es autoadjunta.

Un resultado análogo se obtiene para matrices simétricas reales $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Podemos enunciar ambos resultados conjuntamente para matrices autoadjuntas reales o complejas. Observa que entonces los valores propios son reales.

Teorema. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) A es autoadjunta.

b) Existe una base ortonormal $\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ de $\mathbb{K}^n$ formada por vectores propios de A con correspondientes valores propios reales $\{\lambda_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$.

Un resultado análogo se obtiene para matrices simétricas reales $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Podemos enunciar ambos resultados conjuntamente para matrices autoadjuntas reales o complejas. Observa que entonces los valores propios son reales.

Teorema. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) A es autoadjunta.

b) Existe una base ortonormal $\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ de $\mathbb{K}^n$ formada por vectores propios de A con correspondientes valores propios reales $\{\lambda_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$.

c) Existen números reales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ y vectores ortonormales $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tales que

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \,(x \mid u_k)\, u_k \qquad (x \in \mathbb{K}^n)$$

Un resultado análogo se obtiene para matrices simétricas reales $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Podemos enunciar ambos resultados conjuntamente para matrices autoadjuntas reales o complejas. Observa que entonces los valores propios son reales.

Teorema. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) A es autoadjunta.

b) Existe una base ortonormal $\{u_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ de $\mathbb{K}^n$ formada por vectores propios de A con correspondientes valores propios reales $\{\lambda_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$.

c) Existen números reales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ y vectores ortonormales $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tales que

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, (x \mid u_k) \, u_k \qquad (x \in \mathbb{K}^n)$$

d) $A = U \cdot D \cdot U^*$ donde U es unitaria y D es diagonal con escalares reales en la diagonal.

Los siguientes resultados proporcionan interesante información sobre los operadores compactos.

Los siguientes resultados proporcionan interesante información sobre los operadores compactos.

Proposición. Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $M \neq \{0\}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, y $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$. Pongamos

$$m = \text{ínf}\,\{\|(T - \lambda I)x\| : \|x\| = 1, x \in M\} \tag{18}$$

Entonces:

Los siguientes resultados proporcionan interesante información sobre los operadores compactos.

Proposición. Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $M \neq \{0\}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, y $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$. Pongamos

$$m = \text{ínf}\,\{\|(T-\lambda I)x\| : \|x\| = 1, x \in M\} \tag{18}$$

Entonces:

a) Si $m = 0$, se verifica que $\lambda \in \sigma_p(T)$ y $\ker(T - \lambda I) \cap M \neq \{0\}$.

Los siguientes resultados proporcionan interesante información sobre los operadores compactos.

Proposición. Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $M \neq \{0\}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, y $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$. Pongamos

$$m = \text{ínf}\{\|(T-\lambda I)x\| : \|x\| = 1, x \in M\} \tag{18}$$

Entonces:

a) Si $m = 0$, se verifica que $\lambda \in \sigma_p(T)$ y $\ker(T-\lambda I) \cap M \neq \{0\}$.

b) Si $m > 0$ se verifica que $(T-\lambda I)(M)$ es cerrado y $T-\lambda I$ es un isomorfismo topológico de M sobre $(T-\lambda I)(M)$.

Los siguientes resultados proporcionan interesante información sobre los operadores compactos.

Proposición. Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $M \neq \{0\}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, y $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$. Pongamos

$$m = \text{ínf}\,\{\|(T-\lambda I)x\| : \|x\| = 1, x \in M\} \tag{18}$$

Entonces:

a) Si $m = 0$, se verifica que $\lambda \in \sigma_p(T)$ y $\ker(T-\lambda I) \cap M \neq \{0\}$.

b) Si $m > 0$ se verifica que $(T-\lambda I)(M)$ es cerrado y $T-\lambda I$ es un isomorfismo topológico de M sobre $(T-\lambda I)(M)$.

Proposición. Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$, entonces $(T-\lambda I)(\mathcal{H})$ es cerrado. En consecuencia se verifica que

$$(T-\lambda I)(\mathcal{H}) = \ker(T^* - \overline{\lambda} I)^{\perp} \tag{19}$$

Los siguientes resultados proporcionan interesante información sobre los operadores compactos.

Proposición. Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $M \neq \{0\}$ un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, y $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$. Pongamos

$$m = \text{ínf}\,\{\|(T - \lambda I)x\| : \|x\| = 1, x \in M\} \tag{18}$$

Entonces:

a) Si $m = 0$, se verifica que $\lambda \in \sigma_p(T)$ y $\ker(T - \lambda I) \cap M \neq \{0\}$.

b) Si $m > 0$ se verifica que $(T - \lambda I)(M)$ es cerrado y $T - \lambda I$ es un isomorfismo topológico de M sobre $(T - \lambda I)(M)$.

Proposición. Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$, entonces $(T - \lambda I)(\mathcal{H})$ es cerrado. En consecuencia se verifica que

$$(T - \lambda I)(\mathcal{H}) = \ker(T^* - \overline{\lambda} I)^{\perp} \tag{19}$$

Teorema. Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$. Entonces se verifica que $T - \lambda I$ es inyectiva si, y sólo si, es sobreyectiva:

$$(T - \lambda I)(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \iff \ker(T - \lambda I) = \{0\}$$

Representaremos por $\mathrm{Inv}(L(\mathcal{H}))$ el conjunto de los operadores inversibles de $L(\mathcal{H})$.

Representaremos por $\mathrm{Inv}(L(\mathcal{H}))$ el conjunto de los operadores inversibles de $L(\mathcal{H})$.

Corolario. Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y sea $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$. Entonces se verifica que

$$T - \lambda I \in \mathrm{Inv}(L(\mathcal{H})) \Longleftrightarrow \lambda \notin \sigma_p(T)$$

Representaremos por $\mathrm{Inv}(L(\mathcal{H}))$ el conjunto de los operadores inversibles de $L(\mathcal{H})$.

Corolario. Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y sea $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$. Entonces se verifica que

$$T - \lambda I \in \mathrm{Inv}(L(\mathcal{H})) \Longleftrightarrow \lambda \notin \sigma_p(T)$$

Observa que para $\lambda = 0$ todo lo que puede decirse es que si T es inversible entonces $0 \notin \sigma_p(T)$, pero esto no implica que T sea inversible, ya que en dimensión infinita un operador puede ser inyectivo y no inversible.

Representaremos por $\mathrm{Inv}(L(\mathcal{H}))$ el conjunto de los operadores inversibles de $L(\mathcal{H})$.

Corolario. Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y sea $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$. Entonces se verifica que

$$T - \lambda I \in \mathrm{Inv}(L(\mathcal{H})) \Longleftrightarrow \lambda \notin \sigma_p(T)$$

Observa que para $\lambda = 0$ todo lo que puede decirse es que si T es inversible entonces $0 \notin \sigma_p(T)$, pero esto no implica que T sea inversible, ya que en dimensión infinita un operador puede ser inyectivo y no inversible.

Corolario. Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$, y $\lambda \neq 0$. Entonces se verifica que $\lambda \in \sigma_p(T)$ si, y sólo si, $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$.

Estos resultados suelen enunciarse de la siguiente forma: si T es un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\lambda \neq 0$, entonces si la ecuación

$$(T - \lambda I)x = 0 \tag{20}$$

tiene solución única $x = 0$, se verifica que la ecuación

$$(T - \lambda I)x = y \tag{21}$$

tiene para cada $y \in \mathcal{H}$ solución única $x \in \mathcal{H}$ y, además, dicha solución depende continuamente de y.

Estos resultados suelen enunciarse de la siguiente forma: si T es un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\lambda \neq 0$, entonces si la ecuación

$$(T - \lambda I)x = 0 \tag{20}$$

tiene solución única $x = 0$, se verifica que la ecuación

$$(T - \lambda I)x = y \tag{21}$$

tiene para cada $y \in \mathcal{H}$ solución única $x \in \mathcal{H}$ y, además, dicha solución depende continuamente de y.

Este resultado suele interpretarse diciendo que *la unicidad de la solución de la ecuación* (21) *para cada* $y \in \mathcal{H}$ *implica la existencia de dicha solución*. Es un resultado útil porque con frecuencia es relativamente fácil probar la unicidad de las soluciones de (21) en cuyo caso se tiene garantizada su existencia.

Cálculo funcional acotado. Vamos a ver a continuación cómo el Teorema Espectral permite definir funciones de un operador compacto normal. Consideraremos en lo que sigue un operador compacto T en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert real suponemos que T es autoadjunto, en el caso complejo basta suponer para lo que sigue que T es normal. Supondremos que $\sigma_p(T)$ es infinito y que $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} = \sigma_p(T)$ es una enumeración de $\sigma_p(T)$. Llamaremos M_n al espacio propio asociado al valor propio λ_n y P_n a la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre M_n. En estas condiciones, el Teorema Espectral, nos dice que

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n(x) \qquad (x \in \mathcal{H}) \tag{22}$$

lo que implica que T queda determinado de manera única por sus valores en los espacios propios M_n.

Cálculo funcional acotado. Vamos a ver a continuación cómo el Teorema Espectral permite definir funciones de un operador compacto normal. Consideraremos en lo que sigue un operador compacto T en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert real suponemos que T es autoadjunto, en el caso complejo basta suponer para lo que sigue que T es normal. Supondremos que $\sigma_p(T)$ es infinito y que $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} = \sigma_p(T)$ es una enumeración de $\sigma_p(T)$. Llamaremos M_n al espacio propio asociado al valor propio λ_n y P_n a la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre M_n. En estas condiciones, el Teorema Espectral, nos dice que

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n(x) \qquad (x \in \mathcal{H}) \tag{22}$$

lo que implica que T queda determinado de manera única por sus valores en los espacios propios M_n.Podemos utilizar la igualdad anterior para definir operadores en $\mathcal{H}$ que tengan los mismos espacios propios M_n que T y cuyos valores propios vengan dados por una cierta función $\phi : \sigma_p(T) \to \mathbb{C}$.

Cálculo funcional acotado. Vamos a ver a continuación cómo el Teorema Espectral permite definir funciones de un operador compacto normal. Consideraremos en lo que sigue un operador compacto T en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert real suponemos que T es autoadjunto, en el caso complejo basta suponer para lo que sigue que T es normal. Supondremos que $\sigma_p(T)$ es infinito y que $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} = \sigma_p(T)$ es una enumeración de $\sigma_p(T)$. Llamaremos M_n al espacio propio asociado al valor propio λ_n y P_n a la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre M_n. En estas condiciones, el Teorema Espectral, nos dice que

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n(x) \qquad (x \in \mathcal{H}) \tag{22}$$

lo que implica que T queda determinado de manera única por sus valores en los espacios propios M_n.Podemos utilizar la igualdad anterior para definir operadores en $\mathcal{H}$ que tengan los mismos espacios propios M_n que T y cuyos valores propios vengan dados por una cierta función $\phi : \sigma_p(T) \to \mathbb{C}$.Un tal operador, que representaremos por $\phi[T]$ será de la forma

$$\phi[T](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(\lambda_n) P_n(x) \qquad (x \in \mathcal{H}) \tag{23}$$

Observa que, $\phi[T](x) = \phi(\lambda_n)x$ para todo $x \in M_n$.

Observa que, $\phi[T](x) = \phi(\lambda_n)x$ para todo $x \in M_n$.Naturalmente, hay que imponer alguna condición a la función ϕ que garantice la convergencia de la serie en (23). Una condición clara es que dicha función esté acotada pues, como $\phi(\lambda_n)$ son los valores propios de $\phi[T]$ deberá cumplirse que $|\phi(\lambda)| \leqslant \|\phi[T]\|$ para todo $\lambda \in \sigma_p(T)$.

Observa que, $\phi[T](x) = \phi(\lambda_n)x$ para todo $x \in M_n$.Naturalmente, hay que imponer alguna condición a la función ϕ que garantice la convergencia de la serie en (23). Una condición clara es que dicha función esté acotada pues, como $\phi(\lambda_n)$ son los valores propios de $\phi[T]$ deberá cumplirse que $|\phi(\lambda)| \leqslant \|\phi[T]\|$ para todo $\lambda \in \sigma_p(T)$.Esta condición también es suficiente pues

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \phi(\lambda_k) P_k(x) \right\|^2 = \sum_{k=n}^{m} |\phi(\lambda_n)|^2 \|P_k x\|^2 \leqslant \|\phi\|_\infty^2 \sum_{k=n}^{m} \|P_k x\|^2 =$$

$$= \|\phi\|_\infty^2 \left\| \sum_{k=n}^{m} P_k(x) \right\|^2$$

Observa que, $\phi[T](x) = \phi(\lambda_n)x$ para todo $x \in M_n$.Naturalmente, hay que imponer alguna condición a la función ϕ que garantice la convergencia de la serie en (23). Una condición clara es que dicha función esté acotada pues, como $\phi(\lambda_n)$ son los valores propios de $\phi[T]$ deberá cumplirse que $|\phi(\lambda)| \leqslant \|\phi[T]\|$ para todo $\lambda \in \sigma_p(T)$.Esta condición también es suficiente pues

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \phi(\lambda_k) P_k(x) \right\|^2 = \sum_{k=n}^{m} |\phi(\lambda_n)|^2 \|P_k x\|^2 \leqslant \|\phi\|_\infty^2 \sum_{k=n}^{m} \|P_k x\|^2 =$$
$$= \|\phi\|_\infty^2 \left\| \sum_{k=n}^{m} P_k(x) \right\|^2$$

Por tanto

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \phi(\lambda_k) P_k(x) \right\| \leqslant \|\phi\|_\infty \left\| \sum_{k=n}^{m} P_k(x) \right\|$$

Observa que, $\phi[T](x) = \phi(\lambda_n)x$ para todo $x \in M_n$.Naturalmente, hay que imponer alguna condición a la función ϕ que garantice la convergencia de la serie en (23). Una condición clara es que dicha función esté acotada pues, como $\phi(\lambda_n)$ son los valores propios de $\phi[T]$ deberá cumplirse que $|\phi(\lambda)| \leqslant \|\phi[T]\|$ para todo $\lambda \in \sigma_p(T)$.Esta condición también es suficiente pues

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \phi(\lambda_k) P_k(x) \right\|^2 = \sum_{k=n}^{m} |\phi(\lambda_n)|^2 \|P_k x\|^2 \leqslant \|\phi\|_\infty^2 \sum_{k=n}^{m} \|P_k x\|^2 =$$
$$= \|\phi\|_\infty^2 \left\| \sum_{k=n}^{m} P_k(x) \right\|^2$$

Por tanto

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \phi(\lambda_k) P_k(x) \right\| \leqslant \|\phi\|_\infty \left\| \sum_{k=n}^{m} P_k(x) \right\|$$

Como para cada $x \in \mathcal{H}$ es $x = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x$, la serie $\sum_{n \geqslant 1} P_n x$ converge y, por tanto, cumple la condición de Cauchy, de donde, por la desigualdad anterior, deducimos que la serie en (23) cumple la condición de Cauchy, por lo que es convergente a un elemento de $\mathcal{H}$ que notamos $\phi[T](x)$.

Observa que, $\phi[T](x)=\phi(\lambda_n)x$ para todo $x\in M_n$.Naturalmente, hay que imponer alguna condición a la función ϕ que garantice la convergencia de la serie en (23). Una condición clara es que dicha función esté acotada pues, como $\phi(\lambda_n)$ son los valores propios de $\phi[T]$ deberá cumplirse que $|\phi(\lambda)|\leqslant\|\phi[T]\|$ para todo $\lambda\in\sigma_p(T)$.Esta condición también es suficiente pues

$$\left\|\sum_{k=n}^{m}\phi(\lambda_k)P_k(x)\right\|^2=\sum_{k=n}^{m}|\phi(\lambda_n)|^2\|P_kx\|^2\leqslant\|\phi\|_\infty^2\sum_{k=n}^{m}\|P_kx\|^2=$$
$$=\|\phi\|_\infty^2\left\|\sum_{k=n}^{m}P_k(x)\right\|^2$$

Por tanto
$$\left\|\sum_{k=n}^{m}\phi(\lambda_k)P_k(x)\right\|\leqslant\|\phi\|_\infty\left\|\sum_{k=n}^{m}P_k(x)\right\|$$

Como para cada $x\in\mathcal{H}$ es $x=\sum_{n=1}^{\infty}P_nx$, la serie $\sum_{n\geqslant 1}P_nx$ converge y, por tanto, cumple la condición de Cauchy, de donde, por la desigualdad anterior, deducimos que la serie en (23) cumple la condición de Cauchy, por lo que es convergente a un elemento de $\mathcal{H}$ que notamos $\phi[T](x)$.Queda así definida, por medio de la igualdad (23), una aplicación lineal $\phi[T]:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$.

Dicha aplicación es continua pues para todo $N \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \phi(\lambda_k) P_k(x) \right\|^2 \leqslant \|\phi\|_\infty^2 \sum_{k=1}^{N} \|P_k x\|^2 \leqslant \|\phi\|_\infty^2 \|x\|^2$$

Dicha aplicación es continua pues para todo $N \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \phi(\lambda_k) P_k(x) \right\|^2 \leqslant \|\phi\|_\infty^2 \sum_{k=1}^{N} \|P_k x\|^2 \leqslant \|\phi\|_\infty^2 \|x\|^2$$

Lo que implica que $\|\phi[T](x)\| \leqslant \|\phi\|_\infty \|x\|$, por tanto $\phi[T] \in L(\mathcal{H})$ y $\|\phi[T]\| \leqslant \|\phi\|_\infty$. Pero si $x \in M_n$ con $\|x\| = 1$ se tiene que $\|\phi[T](x)\| = |\phi(\lambda_n)|$, luego $\|\phi[T]\| = \|\phi\|_\infty$.

Dicha aplicación es continua pues para todo $N \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \phi(\lambda_k) P_k(x) \right\|^2 \leqslant \|\phi\|_\infty^2 \sum_{k=1}^{N} \|P_k x\|^2 \leqslant \|\phi\|_\infty^2 \|x\|^2$$

Lo que implica que $\|\phi[T](x)\| \leqslant \|\phi\|_\infty \|x\|$, por tanto $\phi[T] \in L(\mathcal{H})$ y $\|\phi[T]\| \leqslant \|\phi\|_\infty$. Pero si $x \in M_n$ con $\|x\| = 1$ se tiene que $\|\phi[T](x)\| = |\phi(\lambda_n)|$, luego $\|\phi[T]\| = \|\phi\|_\infty$.

Observa que la convergencia de la serie en (23) es convergencia puntual, dicha serie converge en la norma de operadores si, y sólo si, $\{\phi(\lambda_n)\} \to 0$, lo que equivale a que $\phi[T]$ sea compacto.

Dicha aplicación es continua pues para todo $N \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \phi(\lambda_k) P_k(x) \right\|^2 \leqslant \|\phi\|_\infty^2 \sum_{k=1}^{N} \|P_k x\|^2 \leqslant \|\phi\|_\infty^2 \|x\|^2$$

Lo que implica que $\|\phi[T](x)\| \leqslant \|\phi\|_\infty \|x\|$, por tanto $\phi[T] \in L(\mathcal{H})$ y $\|\phi[T]\| \leqslant \|\phi\|_\infty$. Pero si $x \in M_n$ con $\|x\| = 1$ se tiene que $\|\phi[T](x)\| = |\phi(\lambda_n)|$, luego $\|\phi[T]\| = \|\phi\|_\infty$.

Observa que la convergencia de la serie en (23) es convergencia puntual, dicha serie converge en la norma de operadores si, y sólo si, $\{\phi(\lambda_n)\} \to 0$, lo que equivale a que $\phi[T]$ sea compacto.

Observemos que, en el caso en que 0 sea un valor propio de T, en la igualdad (22) aparece como sumando $0 P_{\ker(T)} x = 0$, el cual puede ser eliminado sin que afecte para nada a dicha igualdad, pero eso sí afectaría a la igualdad (23) porque $\phi(0)$ puede ser distinto de 0. Por tanto, para lo que estamos haciendo, la igualdad (22) debe interpretarse literalmente incluyendo un sumando nulo cuando $\ker(T) \neq \{0\}$.

Vamos a considerar el espacio de Banach, $\ell_\infty(\sigma_p(T))$, de las funciones acotadas de $\sigma_p(T)$ en $\mathbb{K}$ con la norma uniforme $\|\phi\|_\infty = \sup\{|\phi(\lambda)| : \lambda \in \sigma_p(T)\}$.

Vamos a considerar el espacio de Banach, $\ell_\infty(\sigma_p(T))$, de las funciones acotadas de $\sigma_p(T)$ en $\mathbb{K}$ con la norma uniforme $\|\phi\|_\infty = \sup\left\{|\phi(\lambda)| : \lambda \in \sigma_p(T)\right\}$.Acabamos de definir una aplicación $\phi \mapsto \phi[T]$ de $\ell_\infty(\sigma_p(T))$ en $L(\mathcal{H})$. Dicha aplicación recibe el nombre de **cálculo funcional acotado** en el operador T.

Vamos a considerar el espacio de Banach, $\ell_\infty(\sigma_p(T))$, de las funciones acotadas de $\sigma_p(T)$ en $\mathbb{K}$ con la norma uniforme $\|\phi\|_\infty = \sup\left\{|\phi(\lambda)| : \lambda \in \sigma_p(T)\right\}$.Acabamos de definir una aplicación $\phi \mapsto \phi[T]$ de $\ell_\infty(\sigma_p(T))$ en $L(\mathcal{H})$. Dicha aplicación recibe el nombre de **cálculo funcional acotado** en el operador T.

Lo mismo que en $L(\mathcal{H})$ tenemos el producto de composición de operadores, $(S,T) \mapsto ST$, y la operación de paso a operador adjunto $T \mapsto T^*$, así mismo en $\ell_\infty(\sigma_p(T))$, tenemos el producto usual de funciones $(\phi,\psi) \mapsto \phi\psi$ y, en el caso complejo, el paso a función compleja conjugada $\phi \mapsto \overline{\phi}$. Que el cálculo funcional acotado conserva todas estas operaciones es lo que se dice en el siguiente teorema.

Vamos a considerar el espacio de Banach, $\ell_\infty(\sigma_p(T))$, de las funciones acotadas de $\sigma_p(T)$ en $\mathbb{K}$ con la norma uniforme $\|\phi\|_\infty = \sup\left\{|\phi(\lambda)| : \lambda \in \sigma_p(T)\right\}$.Acabamos de definir una aplicación $\phi \mapsto \phi[T]$ de $\ell_\infty(\sigma_p(T))$ en $L(\mathcal{H})$. Dicha aplicación recibe el nombre de **cálculo funcional acotado** en el operador T.

Lo mismo que en $L(\mathcal{H})$ tenemos el producto de composición de operadores, $(S,T) \mapsto ST$, y la operación de paso a operador adjunto $T \mapsto T^*$, así mismo en $\ell_\infty(\sigma_p(T))$, tenemos el producto usual de funciones $(\phi,\psi) \mapsto \phi\psi$ y, en el caso complejo, el paso a función compleja conjugada $\phi \mapsto \overline{\phi}$. Que el cálculo funcional acotado conserva todas estas operaciones es lo que se dice en el siguiente teorema.

Teorema. La aplicación $\phi \mapsto \phi[T]$ de $\ell_\infty(\sigma_p(T))$ en $L(\mathcal{H})$ es lineal e isométrica, también es un homomorfismo de álgebras, es decir $(\psi\phi)[T] = \psi[T]\phi[T]$, para todas $\phi, \psi \in \ell_\infty(\sigma_p(T))$, y verifica que $\phi[T]^* = \overline{\phi}[T]$. Además $I = \phi_0[T]$, $T = \phi_1[T]$ donde $\phi_0(\lambda) = 1$ y $\phi_1(\lambda) = \lambda$ para todo $\lambda \in \sigma_p(T)$ y $\sigma_p(\phi[T]) = \phi\big(\sigma_p(T)\big)$.

Vamos a ver ahora cómo la representación espectral de un operador compacto T permite obtener las soluciones de una ecuación del tipo $Tx - \lambda x = y$. Las hipótesis siguen siendo las mismas, $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$ un operador compacto. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert real hay que suponer que T es autoadjunto, y en el caso complejo basta suponer que T es normal. En estas condiciones consideremos la ecuación

$$Tx - \mu x = y \tag{24}$$

en la que se supone que $y \in \mathcal{H}$ es conocido y $\mu \in \mathbb{K}$. Distinguiremos tres casos.

Vamos a ver ahora cómo la representación espectral de un operador compacto T permite obtener las soluciones de una ecuación del tipo $Tx - \lambda x = y$. Las hipótesis siguen siendo las mismas, $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$ un operador compacto. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert real hay que suponer que T es autoadjunto, y en el caso complejo basta suponer que T es normal. En estas condiciones consideremos la ecuación

$$Tx - \mu x = y \tag{24}$$

en la que se supone que $y \in \mathcal{H}$ es conocido y $\mu \in \mathbb{K}$. Distinguiremos tres casos.

A) $\mu \neq 0$ y μ no es un valor propio de T. Entonces se verifica que la función $\psi : \sigma_p(T) \to \mathbb{K}$ dada por $\psi(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda - \mu}$ está acotada y, por tanto, $\psi[T] \in L(\mathcal{H})$. Se tiene que

$$\psi[T](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \mu} P_n(x)$$

Vamos a ver ahora cómo la representación espectral de un operador compacto T permite obtener las soluciones de una ecuación del tipo $Tx - \lambda x = y$. Las hipótesis siguen siendo las mismas, $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$ un operador compacto. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert real hay que suponer que T es autoadjunto, y en el caso complejo basta suponer que T es normal. En estas condiciones consideremos la ecuación

$$Tx - \mu x = y \tag{24}$$

en la que se supone que $y \in \mathcal{H}$ es conocido y $\mu \in \mathbb{K}$. Distinguiremos tres casos.

A) $\mu \neq 0$ y μ no es un valor propio de T. Entonces se verifica que la función $\psi : \sigma_p(T) \to \mathbb{K}$ dada por $\psi(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda - \mu}$ está acotada y, por tanto, $\psi[T] \in L(\mathcal{H})$. Se tiene que

$$\psi[T](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \mu} P_n(x)$$

y

$$Tx - \mu x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n(x) - \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu) P_n(x)$$

Vamos a ver ahora cómo la representación espectral de un operador compacto T permite obtener las soluciones de una ecuación del tipo $Tx - \lambda x = y$. Las hipótesis siguen siendo las mismas, $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $T \in L(\mathcal{H})$ un operador compacto. Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert real hay que suponer que T es autoadjunto, y en el caso complejo basta suponer que T es normal. En estas condiciones consideremos la ecuación

$$Tx - \mu x = y \tag{24}$$

en la que se supone que $y \in \mathcal{H}$ es conocido y $\mu \in \mathbb{K}$. Distinguiremos tres casos.

A) $\mu \neq 0$ y μ no es un valor propio de T. Entonces se verifica que la función $\psi : \sigma_p(T) \to \mathbb{K}$ dada por $\psi(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda - \mu}$ está acotada y, por tanto, $\psi[T] \in L(\mathcal{H})$. Se tiene que

$$\psi[T](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \mu} P_n(x)$$

y

$$Tx - \mu x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n(x) - \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu) P_n(x)$$

Por tanto $T - \mu I = \phi[T]$ sonde $\phi : \sigma_p(T) \to \mathbb{K}$ es la función $\phi(\lambda) = \lambda - \mu$. Como $\psi(\lambda)\phi(\lambda) = 1$, se sigue que $\psi[T] = (T - \mu I)^{-1}$, por lo que la solución de la ecuación (24) es única y viene dada por $x = \psi[T](y)$.

B) $\mu \neq 0$ y $\mu = \lambda_k$ es un valor propio de T. En este caso el operador $T - \mu I$ verifica que

$$(T - \mu I)(\mathcal{H}) = \ker(T^* - \overline{\mu} I)^\perp = \ker(T - \mu I)^\perp$$

B) $\mu \neq 0$ y $\mu = \lambda_k$ es un valor propio de T. En este caso el operador $T - \mu I$ verifica que

$$(T - \mu I)(\mathcal{H}) = \ker(T^* - \overline{\mu} I)^\perp = \ker(T - \mu I)^\perp$$

Además, $\ker(T - \mu I)^\perp$ es un espacio reductor para T. En consecuencia T induce, por restricción, un operador compacto en el espacio de Hilbert $\ker(T - \mu I)^\perp$ cuyos valores propios son $\sigma_p(T) \setminus \{\mu\}$.

B) $\mu \neq 0$ y $\mu = \lambda_k$ es un valor propio de T. En este caso el operador $T - \mu I$ verifica que

$$(T - \mu I)(\mathcal{H}) = \ker(T^* - \overline{\mu} I)^{\perp} = \ker(T - \mu I)^{\perp}$$

Además, $\ker(T - \mu I)^{\perp}$ es un espacio reductor para T. En consecuencia T induce, por restricción, un operador compacto en el espacio de Hilbert $\ker(T - \mu I)^{\perp}$ cuyos valores propios son $\sigma_p(T) \setminus \{\mu\}$.Por tanto, dado $y \in (T - \mu I)(\mathcal{H}) = \ker(T - \mu I)^{\perp}$, podemos aplicar lo visto en el punto A) al operador $T - \mu I$. Por tanto, para $z \in \ker(T - \mu I)^{\perp}$ se verifica que

$$Tz - \lambda_k z = y \Longleftrightarrow z = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_k} P_n(y)$$

B) $\mu \neq 0$ y $\mu = \lambda_k$ es un valor propio de T. En este caso el operador $T - \mu I$ verifica que

$$(T - \mu I)(\mathcal{H}) = \ker(T^* - \overline{\mu} I)^{\perp} = \ker(T - \mu I)^{\perp}$$

Además, $\ker(T - \mu I)^{\perp}$ es un espacio reductor para T. En consecuencia T induce, por restricción, un operador compacto en el espacio de Hilbert $\ker(T - \mu I)^{\perp}$ cuyos valores propios son $\sigma_p(T) \setminus \{\mu\}$.Por tanto, dado $y \in (T - \mu I)(\mathcal{H}) = \ker(T - \mu I)^{\perp}$, podemos aplicar lo visto en el punto A) al operador $T - \mu I$. Por tanto, para $z \in \ker(T - \mu I)^{\perp}$ se verifica que

$$Tz - \lambda_k z = y \iff z = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_k} P_n(y)$$

Ahora, dado $x \in \mathcal{H}$, podemos escribir $x = z + u$ con $z \in \ker(T - \mu I)^{\perp}$ y $u \in \ker(T - \mu I)$, con lo que $(T - \mu I)(x) = (T - \mu I)(z) = y$.

B) $\mu \neq 0$ y $\mu = \lambda_k$ es un valor propio de T. En este caso el operador $T - \mu I$ verifica que

$$(T - \mu I)(\mathcal{H}) = \ker(T^* - \overline{\mu} I)^{\perp} = \ker(T - \mu I)^{\perp}$$

Además, $\ker(T - \mu I)^{\perp}$ es un espacio reductor para T. En consecuencia T induce, por restricción, un operador compacto en el espacio de Hilbert $\ker(T - \mu I)^{\perp}$ cuyos valores propios son $\sigma_p(T) \setminus \{\mu\}$.Por tanto, dado $y \in (T - \mu I)(\mathcal{H}) = \ker(T - \mu I)^{\perp}$, podemos aplicar lo visto en el punto A) al operador $T - \mu I$. Por tanto, para $z \in \ker(T - \mu I)^{\perp}$ se verifica que

$$Tz - \lambda_k z = y \iff z = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_k} P_n(y)$$

Ahora, dado $x \in \mathcal{H}$, podemos escribir $x = z + u$ con $z \in \ker(T - \mu I)^{\perp}$ y $u \in \ker(T - \mu I)$, con lo que $(T - \mu I)(x) = (T - \mu I)(z) = y$.Concluimos que en este caso las soluciones de la ecuación (24) vienen dadas por

$$x = u + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_k} P_n(y) \qquad (y \in \ker(T - \lambda_k I)^{\perp}, u \in \ker(T - \lambda_k I))$$

B) $\mu \neq 0$ y $\mu = \lambda_k$ es un valor propio de T. En este caso el operador $T - \mu I$ verifica que

$$(T - \mu I)(\mathcal{H}) = \ker(T^* - \overline{\mu} I)^\perp = \ker(T - \mu I)^\perp$$

Además, $\ker(T - \mu I)^\perp$ es un espacio reductor para T. En consecuencia T induce, por restricción, un operador compacto en el espacio de Hilbert $\ker(T - \mu I)^\perp$ cuyos valores propios son $\sigma_p(T) \setminus \{\mu\}$.Por tanto, dado $y \in (T - \mu I)(\mathcal{H}) = \ker(T - \mu I)^\perp$, podemos aplicar lo visto en el punto A) al operador $T - \mu I$. Por tanto, para $z \in \ker(T - \mu I)^\perp$ se verifica que

$$Tz - \lambda_k z = y \Longleftrightarrow z = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_k} P_n(y)$$

Ahora, dado $x \in \mathcal{H}$, podemos escribir $x = z + u$ con $z \in \ker(T - \mu I)^\perp$ y $u \in \ker(T - \mu I)$, con lo que $(T - \mu I)(x) = (T - \mu I)(z) = y$.Concluimos que en este caso las soluciones de la ecuación (24) vienen dadas por

$$x = u + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_k} P_n(y) \qquad (y \in \ker(T - \lambda_k I)^\perp, u \in \ker(T - \lambda_k I))$$

en consecuencia hay un total de m_k soluciones linealmente independientes donde m_k es la dimensión del espacio $\ker(T - \lambda_k I)$.

B) $\mu \neq 0$ y $\mu = \lambda_k$ es un valor propio de T. En este caso el operador $T - \mu I$ verifica que

$$(T - \mu I)(\mathcal{H}) = \ker(T^* - \overline{\mu} I)^{\perp} = \ker(T - \mu I)^{\perp}$$

Además, $\ker(T - \mu I)^{\perp}$ es un espacio reductor para T. En consecuencia T induce, por restricción, un operador compacto en el espacio de Hilbert $\ker(T - \mu I)^{\perp}$ cuyos valores propios son $\sigma_p(T) \setminus \{\mu\}$.Por tanto, dado $y \in (T - \mu I)(\mathcal{H}) = \ker(T - \mu I)^{\perp}$, podemos aplicar lo visto en el punto A) al operador $T - \mu I$. Por tanto, para $z \in \ker(T - \mu I)^{\perp}$ se verifica que

$$Tz - \lambda_k z = y \Longleftrightarrow z = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_k} P_n(y)$$

Ahora, dado $x \in \mathcal{H}$, podemos escribir $x = z + u$ con $z \in \ker(T - \mu I)^{\perp}$ y $u \in \ker(T - \mu I)$, con lo que $(T - \mu I)(x) = (T - \mu I)(z) = y$.Concluimos que en este caso las soluciones de la ecuación (24) vienen dadas por

$$x = u + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_k} P_n(y) \qquad (y \in \ker(T - \lambda_k I)^{\perp}, u \in \ker(T - \lambda_k I))$$

en consecuencia hay un total de m_k soluciones linealmente independientes donde m_k es la dimensión del espacio $\ker(T - \lambda_k I)$.Por otra parte, es claro que si $y \notin \ker(T - \lambda_k I)^{\perp}$ entonces la ecuación (24) no tiene solución.

C) $\mu = 0$. En este caso la ecuación es $Tx = y$ que, evidentemente, tiene solución cuando $y \in T(\mathcal{H})$.

C) $\mu = 0$. En este caso la ecuación es $Tx = y$ que, evidentemente, tiene solución cuando $y \in T(\mathcal{H})$.Para describir las soluciones consideremos la expresión de T dada por

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \otimes u_n$$

Donde $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $\overline{T(\mathcal{H})}$ formada por vectores propios de T con correspondientes valores propios $\alpha_n \neq 0$.

C) $\mu = 0$. En este caso la ecuación es $Tx = y$ que, evidentemente, tiene solución cuando $y \in T(\mathcal{H})$.Para describir las soluciones consideremos la expresión de T dada por

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \otimes u_n$$

Donde $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $\overline{T(\mathcal{H})}$ formada por vectores propios de T con correspondientes valores propios $\alpha_n \neq 0$.Por tanto

$$y \in T(\mathcal{H}) \Longleftrightarrow y = Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x \mid u_n) u_n \Longleftrightarrow (y \mid u_n) = \alpha_n (x \mid u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

C) $\mu = 0$. En este caso la ecuación es $Tx = y$ que, evidentemente, tiene solución cuando $y \in T(\mathcal{H})$.Para describir las soluciones consideremos la expresión de T dada por

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \otimes u_n$$

Donde $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $\overline{T(\mathcal{H})}$ formada por vectores propios de T con correspondientes valores propios $\alpha_n \neq 0$.Por tanto

$$y \in T(\mathcal{H}) \Longleftrightarrow y = Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x \mid u_n) u_n \Longleftrightarrow (y \mid u_n) = \alpha_n (x \mid u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Puesto que, por la desigualdad de Bessel, la serie $\sum_{n \geqslant 1} |(x \mid u_n)|^2$ es convergente,

deducimos que la serie $\sum_{n \geqslant 1} \frac{|(y \mid u_n)|^2}{|\alpha_n|^2}$ es convergente.

C) $\mu = 0$. En este caso la ecuación es $Tx = y$ que, evidentemente, tiene solución cuando $y \in T(\mathcal{H})$.Para describir las soluciones consideremos la expresión de T dada por

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \otimes u_n$$

Donde $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $\overline{T(\mathcal{H})}$ formada por vectores propios de T con correspondientes valores propios $\alpha_n \neq 0$.Por tanto

$$y \in T(\mathcal{H}) \Longleftrightarrow y = Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x \mid u_n) u_n \Longleftrightarrow (y \mid u_n) = \alpha_n (x \mid u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Puesto que, por la desigualdad de Bessel, la serie $\sum_{n \geqslant 1} |(x \mid u_n)|^2$ es convergente, deducimos que la serie $\sum_{n \geqslant 1} \frac{|(y \mid u_n)|^2}{|\alpha_n|^2}$ es convergente.Por tanto podemos describir la imagen de T como sigue

$$T(\mathcal{H}) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{|\alpha_n|^2} < \infty \right\} \tag{25}$$

C) $\mu = 0$. En este caso la ecuación es $Tx = y$ que, evidentemente, tiene solución cuando $y \in T(\mathcal{H})$.Para describir las soluciones consideremos la expresión de T dada por

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \otimes u_n$$

Donde $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $\overline{T(\mathcal{H})}$ formada por vectores propios de T con correspondientes valores propios $\alpha_n \neq 0$.Por tanto

$$y \in T(\mathcal{H}) \Longleftrightarrow y = Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x \mid u_n) u_n \Longleftrightarrow (y \mid u_n) = \alpha_n (x \mid u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Puesto que, por la desigualdad de Bessel, la serie $\sum_{n \geqslant 1} |(x \mid u_n)|^2$ es convergente, deducimos que la serie $\sum_{n \geqslant 1} \frac{|(y \mid u_n)|^2}{|\alpha_n|^2}$ es convergente.Por tanto podemos describir la imagen de T como sigue

$$T(\mathcal{H}) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{|\alpha_n|^2} < \infty \right\} \tag{25}$$

Dado $y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$ en $T(\mathcal{H})$ el vector de $\mathcal{H}$ dado por $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\alpha_n} u_n$ verifica que $Tx = y$. Naturalmente, si $z \in \ker(T)$ también $T(x + z) = y$.

De la igualdad (25) se deduce que la imagen del operador T no es cerrada. En efecto, basta considerar una sucesión parcial $\{\alpha_{\sigma(n)}\}$ tal que $\alpha_{\sigma(n)} \leqslant \dfrac{1}{n}$, y definimos una sucesión $\{c_n\}$ por $c_{\sigma(n)} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\alpha_{\sigma(n)}$ y $c_n = 0$ para $n \notin \sigma(\mathbb{N})$.

Con ello tenemos que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} c_n^2$ converge, por lo que $w = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n u_n \in \mathcal{H}$, y si consideramos la sucesión de las sumas parciales $z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k u_k$, se tiene que $z_n \in T(\mathcal{H})$ pero $\{z_n\} \to w$, y $w \notin T(\mathcal{H})$ porque la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{|c_n|^2}{|\alpha_n|^2}$ no converge.

De la igualdad (25) se deduce que la imagen del operador T no es cerrada. En efecto, basta considerar una sucesión parcial $\{\alpha_{\sigma(n)}\}$ tal que $\alpha_{\sigma(n)} \leqslant \dfrac{1}{n}$, y definimos una sucesión $\{c_n\}$ por $c_{\sigma(n)} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\alpha_{\sigma(n)}$ y $c_n = 0$ para $n \notin \sigma(\mathbb{N})$.

Con ello tenemos que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} c_n^2$ converge, por lo que $w = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n \in \mathcal{H}$, y si consideramos la sucesión de las sumas parciales $z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k u_k$, se tiene que $z_n \in T(\mathcal{H})$ pero $\{z_n\} \to w$, y $w \notin T(\mathcal{H})$ porque la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{|c_n|^2}{|\alpha_n|^2}$ no converge.

Proposición. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $T \in L(\mathcal{H})$ un operador compacto y $\lambda \in \mathbb{K}$, con $\lambda \neq 0$. Entonces se verifica que los espacios $\ker(T - \lambda I)$ y $\ker(T^* - \overline{\lambda} I)$ tienen igual dimensión.

Alternativa de Fredholm. Dado un operador compacto $T \in L(\mathcal{H})$ y un número $\lambda \neq 0$, consideremos las ecuaciones homogéneas

$$(T - \lambda I)x = 0, \qquad (T^* - \overline{\lambda} I)y = 0 \tag{26}$$

y las ecuaciones no homogéneas

$$(T - \lambda I)x = u, \qquad (T^* - \overline{\lambda} I)y = v \tag{27}$$

Entonces se verifica una y sólo una de las siguientes afirmaciones.

Alternativa de Fredholm. Dado un operador compacto $T \in L(\mathcal{H})$ y un número $\lambda \neq 0$, consideremos las ecuaciones homogéneas

$$(T - \lambda I)x = 0, \qquad (T^* - \overline{\lambda} I)y = 0 \tag{26}$$

y las ecuaciones no homogéneas

$$(T - \lambda I)x = u, \qquad (T^* - \overline{\lambda} I)y = v \tag{27}$$

Entonces se verifica una y sólo una de las siguientes afirmaciones.

a) Las ecuaciones (26) tienen soluciones únicas $x = 0$, $y = 0$, en cuyo caso las ecuaciones (27) tienen solución única parar todo $u \in \mathcal{H}$, $v \in \mathcal{H}$, soluciones que dependen continuamente de u y de v.

Alternativa de Fredholm. Dado un operador compacto $T \in L(\mathcal{H})$ y un número $\lambda \neq 0$, consideremos las ecuaciones homogéneas

$$(T - \lambda I)x = 0, \qquad (T^* - \overline{\lambda} I)y = 0 \tag{26}$$

y las ecuaciones no homogéneas

$$(T - \lambda I)x = u, \qquad (T^* - \overline{\lambda} I)y = v \tag{27}$$

Entonces se verifica una y sólo una de las siguientes afirmaciones.

a) Las ecuaciones (26) tienen soluciones únicas $x = 0$, $y = 0$, en cuyo caso las ecuaciones (27) tienen solución única parar todo $u \in \mathcal{H}$, $v \in \mathcal{H}$, soluciones que dependen continuamente de u y de v.

b) Las ecuaciones (26) no tienen soluciones únicas, en cuyo caso ambas tienen el mismo número finito, igual a la dimensión de $\ker(T - \lambda I)$, de soluciones linealmente independientes, y las ecuaciones (27) tienen solución si, y sólo si, $v \in \ker(T - \lambda I)^\perp$ y $u \in \ker(T^* - \overline{\lambda} I)^\perp$, en cuyo caso las soluciones están determinadas módulo $\ker(T - \lambda I)$ o módulo $\ker(T^* - \overline{\lambda} I)$.

Raíz cuadrada y forma polar de un operador. Un operador $T \in L(\mathcal{H})$ se dice que es **positivo** si es autoadjunto y $(Tx \mid x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Raíz cuadrada y forma polar de un operador. Un operador $T \in L(\mathcal{H})$ se dice que es **positivo** si es autoadjunto y $(Tx \mid x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.Las proyecciones ortogonales son operadores positivos pues, si P es una proyección ortogonal, se tiene que
$(Px \mid x) = \left(P^2x \mid x\right) = (Px \mid Px) \geqslant 0.$

Raíz cuadrada y forma polar de un operador. Un operador $T \in L(\mathcal{H})$ se dice que es **positivo** si es autoadjunto y $(Tx \mid x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.Las proyecciones ortogonales son operadores positivos pues, si P es una proyección ortogonal, se tiene que $(Px \mid x) = \left(P^2 x \mid x\right) = (Px \mid Px) \geqslant 0$.También son operadores positivos T^*T y TT^* cualquiera sea $T \in L(\mathcal{H})$. Es claro que la suma de operadores positivos y el producto de un operador positivo por un escalar positivo son operadores positivos. La continuidad del producto escalar implica que los operadores positivos son un conjunto cerrado en $L(\mathcal{H})$.

Raíz cuadrada y forma polar de un operador. Un operador $T \in L(\mathcal{H})$ se dice que es **positivo** si es autoadjunto y $(Tx \mid x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.Las proyecciones ortogonales son operadores positivos pues, si P es una proyección ortogonal, se tiene que $(Px \mid x) = \left(P^2 x \mid x\right) = (Px \mid Px) \geqslant 0$.También son operadores positivos T^*T y TT^* cualquiera sea $T \in L(\mathcal{H})$. Es claro que la suma de operadores positivos y el producto de un operador positivo por un escalar positivo son operadores positivos. La continuidad del producto escalar implica que los operadores positivos son un conjunto cerrado en $L(\mathcal{H})$.Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo, entonces sabemos que la condición $(Tx \mid x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, por sí sola, implica que T es autoadjunto.

Raíz cuadrada y forma polar de un operador. Un operador $T \in L(\mathcal{H})$ se dice que es **positivo** si es autoadjunto y $(Tx \mid x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.Las proyecciones ortogonales son operadores positivos pues, si P es una proyección ortogonal, se tiene que $(Px \mid x) = \left(P^2 x \mid x\right) = (Px \mid Px) \geqslant 0$.También son operadores positivos T^*T y TT^* cualquiera sea $T \in L(\mathcal{H})$. Es claro que la suma de operadores positivos y el producto de un operador positivo por un escalar positivo son operadores positivos. La continuidad del producto escalar implica que los operadores positivos son un conjunto cerrado en $L(\mathcal{H})$.Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo, entonces sabemos que la condición $(Tx \mid x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, por sí sola, implica que T es autoadjunto.

Proposición. Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{H}$ es real se supone que T es autoadjunto, y si $\mathcal{H}$ es complejo se supone que T es normal.

Raíz cuadrada y forma polar de un operador. Un operador $T \in L(\mathcal{H})$ se dice que es **positivo** si es autoadjunto y $(Tx \mid x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.Las proyecciones ortogonales son operadores positivos pues, si P es una proyección ortogonal, se tiene que $(Px \mid x) = \left(P^2 x \mid x\right) = (Px \mid Px) \geqslant 0$.También son operadores positivos T^*T y TT^* cualquiera sea $T \in L(\mathcal{H})$. Es claro que la suma de operadores positivos y el producto de un operador positivo por un escalar positivo son operadores positivos. La continuidad del producto escalar implica que los operadores positivos son un conjunto cerrado en $L(\mathcal{H})$.Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo, entonces sabemos que la condición $(Tx \mid x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, por sí sola, implica que T es autoadjunto.

Proposición. Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{H}$ es real se supone que T es autoadjunto, y si $\mathcal{H}$ es complejo se supone que T es normal.

a) T es positivo si, y sólo si, todos sus valores propios son números reales mayores o iguales que cero.

Raíz cuadrada y forma polar de un operador. Un operador $T \in L(\mathcal{H})$ se dice que es **positivo** si es autoadjunto y $(Tx \mid x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.Las proyecciones ortogonales son operadores positivos pues, si P es una proyección ortogonal, se tiene que
$(Px \mid x) = \left(P^2 x \mid x\right) = (Px \mid Px) \geqslant 0$.También son operadores positivos T^*T y TT^* cualquiera sea $T \in L(\mathcal{H})$. Es claro que la suma de operadores positivos y el producto de un operador positivo por un escalar positivo son operadores positivos. La continuidad del producto escalar implica que los operadores positivos son un conjunto cerrado en $L(\mathcal{H})$.Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo, entonces sabemos que la condición $(Tx \mid x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, por sí sola, implica que T es autoadjunto.

Proposición. Sea T un operador compacto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{H}$ es real se supone que T es autoadjunto, y si $\mathcal{H}$ es complejo se supone que T es normal.

a) T es positivo si, y sólo si, todos sus valores propios son números reales mayores o iguales que cero.

b) Si T es positivo existe un único operador compacto y positivo S tal que $S^2 = T$, dicho operador se representa con la notación $S = \sqrt{T}$

Nos planteamos ahora obtener una “descomposición polar” de un operador análoga a la representación de un complejo en forma polar $z = |z| e^{i\theta}$.

Nos planteamos ahora obtener una “descomposición polar” de un operador análoga a la representación de un complejo en forma polar $z = |z|\, e^{i\theta}$.Consideremos primero el caso finito dimensional en que $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ y el operador viene dado por una matriz normal inversible $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

Nos planteamos ahora obtener una “descomposición polar” de un operador análoga a la representación de un complejo en forma polar $z = |z|\,\mathrm{e}^{i\theta}$.Consideremos primero el caso finito dimensional en que $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ y el operador viene dado por una matriz normal inversible $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.Hemos visto que existen una matriz unitaria, U, y una matriz diagonal $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, tales que $A = U \cdot D \cdot U^*$. Además, como A es inversible, todos sus valores propios λ_k deben ser distintos de cero.

Nos planteamos ahora obtener una “descomposición polar” de un operador análoga a la representación de un complejo en forma polar $z = |z|\, e^{i\theta}$.Consideremos primero el caso finito dimensional en que $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ y el operador viene dado por una matriz normal inversible $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.Hemos visto que existen una matriz unitaria, U, y una matriz diagonal $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, tales que $A = U \cdot D \cdot U^*$. Además, como A es inversible, todos sus valores propios λ_k deben ser distintos de cero.Podemos escribir $D = \Phi \cdot |D|$ donde

$$\Phi = \mathrm{diag}\left(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \ldots, e^{i\theta_n}\right), \qquad |D| = \mathrm{diag}\left(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|\right)$$

Nos planteamos ahora obtener una "descomposición polar" de un operador análoga a la representación de un complejo en forma polar $z = |z|e^{i\theta}$.Consideremos primero el caso finito dimensional en que $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ y el operador viene dado por una matriz normal inversible $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.Hemos visto que existen una matriz unitaria, U, y una matriz diagonal $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, tales que $A = U \cdot D \cdot U^*$. Además, como A es inversible, todos sus valores propios λ_k deben ser distintos de cero.Podemos escribir $D = \Phi \cdot |D|$ donde

$$\Phi = \mathrm{diag}\left(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \ldots, e^{i\theta_n}\right), \qquad |D| = \mathrm{diag}\left(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|\right)$$

$$A = U \cdot \Phi \cdot |D| \cdot U^* = U \cdot \Phi \cdot U^* \cdot U \cdot |D| \cdot U^* = V \cdot S$$

donde $V = U \cdot \Phi \cdot U^*$ es una matriz unitaria y $S = U \cdot |D| \cdot U^*$ es positiva.

Nos planteamos ahora obtener una “descomposición polar” de un operador análoga a la representación de un complejo en forma polar $z = |z|\,e^{i\theta}$.Consideremos primero el caso finito dimensional en que $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ y el operador viene dado por una matriz normal inversible $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.Hemos visto que existen una matriz unitaria, U, y una matriz diagonal $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, tales que $A = U \cdot D \cdot U^*$. Además, como A es inversible, todos sus valores propios λ_k deben ser distintos de cero.Podemos escribir $D = \Phi \cdot |D|$ donde

$$\Phi = \mathrm{diag}\left(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_n}\right), \qquad |D| = \mathrm{diag}\left(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\right)$$

$$A = U \cdot \Phi \cdot |D| \cdot U^* = U \cdot \Phi \cdot U^* \cdot U \cdot |D| \cdot U^* = V \cdot S$$

donde $V = U \cdot \Phi \cdot U^*$ es una matriz unitaria y $S = U \cdot |D| \cdot U^*$ es positiva.Observa que $S^2 = U \cdot |D|^2 \cdot U^* = A^*A$, esto es, $S = \sqrt{A^* \cdot A}$. Por tanto la igualdad obtenida $A = V \cdot S$ responde a lo que queríamos.

Nos planteamos ahora obtener una “descomposición polar” de un operador análoga a la representación de un complejo en forma polar $z = |z|e^{i\theta}$.Consideremos primero el caso finito dimensional en que $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ y el operador viene dado por una matriz normal inversible $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.Hemos visto que existen una matriz unitaria, U, y una matriz diagonal $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, tales que $A = U \cdot D \cdot U^*$. Además, como A es inversible, todos sus valores propios λ_k deben ser distintos de cero.Podemos escribir $D = \Phi \cdot |D|$ donde

$$\Phi = \mathrm{diag}\left(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_n}\right), \qquad |D| = \mathrm{diag}\left(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\right)$$

$$A = U \cdot \Phi \cdot |D| \cdot U^* = U \cdot \Phi \cdot U^* \cdot U \cdot |D| \cdot U^* = V \cdot S$$

donde $V = U \cdot \Phi \cdot U^*$ es una matriz unitaria y $S = U \cdot |D| \cdot U^*$ es positiva.Observa que $S^2 = U \cdot |D|^2 \cdot U^* = A^*A$, esto es, $S = \sqrt{A^* \cdot A}$. Por tanto la igualdad obtenida $A = V \cdot S$ responde a lo que queríamos.Si no se supone que A es inversible, algunos elementos en la diagonal de D serán nulos (tantos como la dimensión del núcleo de A) y V ya no será una matriz unitaria, pero $V \cdot V^* = \mathrm{diag}(1, 1, 1, \dots, 0, \dots, 0)$ es una isometría cuando se restringe al complemento ortogonal de su núcleo.

Consideremos ya el caso general en que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathcal{H})$ es un operador cualquiera. Como T^*T es positivo, definimos $|T| = \sqrt{T^*T}$.

Consideremos ya el caso general en que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathcal{H})$ es un operador cualquiera. Como T^*T es positivo, definimos $|T| = \sqrt{T^*T}$.

Se dice que un operador $T \in L(\mathcal{H})$ es una **isometría parcial** cuando su restricción a $(\ker T)^{\perp}$ es una isometría, es decir, $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in (\ker T)^{\perp}$.

Consideremos ya el caso general en que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathcal{H})$ es un operador cualquiera. Como T^*T es positivo, definimos $|T| = \sqrt{T^*T}$.

Se dice que un operador $T \in L(\mathcal{H})$ es una **isometría parcial** cuando su restricción a $(\ker T)^\perp$ es una isometría, es decir, $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in (\ker T)^\perp$.

Descomposición polar. Sea $T \in L(\mathcal{H})$. Entonces existen una isometría parcial U tal que $T = U|T|$ y $\ker(U) = \ker(T)$. Además $U(\mathcal{H}) = \overline{T(\mathcal{H})}$. Si $V \in L(\mathcal{H})$ es tal que $T = V|T|$ y $\ker(V) \supset \ker(T)$, entonces $V = U$.

Consideremos ya el caso general en que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathcal{H})$ es un operador cualquiera. Como T^*T es positivo, definimos $|T| = \sqrt{T^*T}$.

Se dice que un operador $T \in L(\mathcal{H})$ es una **isometría parcial** cuando su restricción a $(\ker T)^\perp$ es una isometría, es decir, $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in (\ker T)^\perp$.

Descomposición polar. Sea $T \in L(\mathcal{H})$. Entonces existen una isometría parcial U tal que $T = U|T|$ y $\ker(U) = \ker(T)$. Además $U(\mathcal{H}) = \overline{T(\mathcal{H})}$. Si $V \in L(\mathcal{H})$ es tal que $T = V|T|$ y $\ker(V) \supset \ker(T)$, entonces $V = U$.Si T es inversible, entonces U es unitario.

Consideremos ya el caso general en que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathcal{H})$ es un operador cualquiera. Como T^*T es positivo, definimos $|T| = \sqrt{T^*T}$.

Se dice que un operador $T \in L(\mathcal{H})$ es una **isometría parcial** cuando su restricción a $(\ker T)^\perp$ es una isometría, es decir, $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in (\ker T)^\perp$.

Descomposición polar. Sea $T \in L(\mathcal{H})$. Entonces existen una isometría parcial U tal que $T = U|T|$ y $\ker(U) = \ker(T)$. Además $U(\mathcal{H}) = \overline{T(\mathcal{H})}$. Si $V \in L(\mathcal{H})$ es tal que $T = V|T|$ y $\ker(V) \supset \ker(T)$, entonces $V = U$.Si T es inversible, entonces U es unitario.

En general, para un operador compacto arbitrario, $T \in K(\mathcal{H})$, no puede asegurarse la existencia de valores propios (el operador de Volterra es un ejemplo), por lo que para un tal operador es impensable una representación espectral análoga a la obtenida para el caso en que el operador sea también normal.

Consideremos ya el caso general en que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathcal{H})$ es un operador cualquiera. Como T^*T es positivo, definimos $|T| = \sqrt{T^*T}$.

Se dice que un operador $T \in L(\mathcal{H})$ es una **isometría parcial** cuando su restricción a $(\ker T)^{\perp}$ es una isometría, es decir, $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in (\ker T)^{\perp}$.

Descomposición polar. Sea $T \in L(\mathcal{H})$. Entonces existen una isometría parcial U tal que $T = U|T|$ y $\ker(U) = \ker(T)$. Además $U(\mathcal{H}) = \overline{T(\mathcal{H})}$. Si $V \in L(\mathcal{H})$ es tal que $T = V|T|$ y $\ker(V) \supset \ker(T)$, entonces $V = U$.Si T es inversible, entonces U es unitario.

En general, para un operador compacto arbitrario, $T \in K(\mathcal{H})$, no puede asegurarse la existencia de valores propios (el operador de Volterra es un ejemplo), por lo que para un tal operador es impensable una representación espectral análoga a la obtenida para el caso en que el operador sea también normal.Pero, a partir de la descomposición polar, usando la representación espectral del operador compacto y autoadjunto $|T|$, podemos obtener una representación de T como una serie de operadores de rango uno.

Consideremos ya el caso general en que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo y $T \in L(\mathcal{H})$ es un operador cualquiera. Como T^*T es positivo, definimos $|T| = \sqrt{T^*T}$.

Se dice que un operador $T \in L(\mathcal{H})$ es una **isometría parcial** cuando su restricción a $(\ker T)^\perp$ es una isometría, es decir, $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in (\ker T)^\perp$.

Descomposición polar. Sea $T \in L(\mathcal{H})$. Entonces existen una isometría parcial U tal que $T = U|T|$ y $\ker(U) = \ker(T)$. Además $U(\mathcal{H}) = \overline{T(\mathcal{H})}$. Si $V \in L(\mathcal{H})$ es tal que $T = V|T|$ y $\ker(V) \supset \ker(T)$, entonces $V = U$.Si T es inversible, entonces U es unitario.

En general, para un operador compacto arbitrario, $T \in K(\mathcal{H})$, no puede asegurarse la existencia de valores propios (el operador de Volterra es un ejemplo), por lo que para un tal operador es impensable una representación espectral análoga a la obtenida para el caso en que el operador sea también normal.Pero, a partir de la descomposición polar, usando la representación espectral del operador compacto y autoadjunto $|T|$, podemos obtener una representación de T como una serie de operadores de rango uno.Los valores propios del operador $|T|$ se llaman **valores singulares** de T.

Sea, pues, $T = U|T|$ la descomposición polar de T. Por el teorema espectral para T^*T tenemos que

$$[T * T](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n (x \mid u_n) u_n$$

donde $\lambda_n > 0$ son los valores propios distintos de cero de T^*T y $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $\overline{[T^*T](\mathcal{H})}$formada por vectores propios de T^*T con valores propios respectivos λ_n (cada uno de ellos repetido tantas veces como la dimensión del espacio propio correspondiente).

Sea, pues, $T = U|T|$ la descomposición polar de T. Por el teorema espectral para T^*T tenemos que

$$[T * T](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n (x \mid u_n) u_n$$

donde $\lambda_n > 0$ son los valores propios distintos de cero de T^*T y $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $\overline{[T^*T](\mathcal{H})}$formada por vectores propios de T^*T con valores propios respectivos λ_n (cada uno de ellos repetido tantas veces como la dimensión del espacio propio correspondiente).El operador $|T|$ viene dado por

$$|T|x = \sum_{k=1}^{\infty} s_n (x \mid u_n) u_n \qquad (s_n = \sqrt{\lambda_n} \ \ \forall n \in \mathbb{N})$$

Sea, pues, $T = U|T|$ la descomposición polar de T. Por el teorema espectral para T^*T tenemos que

$$[T * T](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n (x \mid u_n) u_n$$

donde $\lambda_n > 0$ son los valores propios distintos de cero de T^*T y $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $\overline{[T^*T](\mathcal{H})}$formada por vectores propios de T^*T con valores propios respectivos λ_n (cada uno de ellos repetido tantas veces como la dimensión del espacio propio correspondiente).El operador $|T|$ viene dado por

$$|T|x = \sum_{k=1}^{\infty} s_n (x \mid u_n) u_n \qquad (s_n = \sqrt{\lambda_n} \ \ \forall n \in \mathbb{N})$$

Por tanto, poniendo $v_n = U(u_n)$, tenemos que

$$Tx = U|T|x = \sum_{k=1}^{\infty} s_n (x \mid u_n) v_n \tag{28}$$

Sea, pues, $T = U|T|$ la descomposición polar de T. Por el teorema espectral para T^*T tenemos que

$$[T * T](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n (x \mid u_n) u_n$$

donde $\lambda_n > 0$ son los valores propios distintos de cero de T^*T y $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $\overline{[T^*T](\mathcal{H})}$formada por vectores propios de T^*T con valores propios respectivos λ_n (cada uno de ellos repetido tantas veces como la dimensión del espacio propio correspondiente).El operador $|T|$ viene dado por

$$|T|x = \sum_{k=1}^{\infty} s_n (x \mid u_n) u_n \qquad (s_n = \sqrt{\lambda_n} \ \ \forall n \in \mathbb{N})$$

Por tanto, poniendo $v_n = U(u_n)$, tenemos que

$$Tx = U|T|x = \sum_{k=1}^{\infty} s_n (x \mid u_n) v_n \tag{28}$$

Puesto que U es un isomorfismo isométrico de $\overline{|T|(\mathcal{H})}$ sobre $\overline{T(\mathcal{H})}$ y

$$\overline{[T^*T](\mathcal{H})} = \ker(T^*T)^{\perp} = \ker(T)^{\perp} = \overline{|T|(\mathcal{H})}$$

se tiene que $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $\overline{T(\mathcal{H})}$.

Sea, pues, $T = U|T|$ la descomposición polar de T. Por el teorema espectral para T^*T tenemos que

$$[T * T](x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n (x \mid u_n) u_n$$

donde $\lambda_n > 0$ son los valores propios distintos de cero de T^*T y $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $\overline{[T^*T](\mathcal{H})}$formada por vectores propios de T^*T con valores propios respectivos λ_n (cada uno de ellos repetido tantas veces como la dimensión del espacio propio correspondiente).El operador $|T|$ viene dado por

$$|T|x = \sum_{k=1}^{\infty} s_n (x \mid u_n) u_n \qquad (s_n = \sqrt{\lambda_n} \ \ \forall n \in \mathbb{N})$$

Por tanto, poniendo $v_n = U(u_n)$, tenemos que

$$Tx = U|T|x = \sum_{k=1}^{\infty} s_n (x \mid u_n) v_n \tag{28}$$

Puesto que U es un isomorfismo isométrico de $\overline{|T|(\mathcal{H})}$ sobre $\overline{T(\mathcal{H})}$ y

$$\overline{[T^*T](\mathcal{H})} = \ker(T^*T)^{\perp} = \ker(T)^{\perp} = \overline{|T|(\mathcal{H})}$$

se tiene que $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $\overline{T(\mathcal{H})}$.La igualdad (28) se conoce como **representación singular** del operador compacto T.